Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202) **Primavera 2026**

Tarea 10 (Integrales de superficie)

---

1. Calcula el área de la superficie de ecuación $z = 4 - x^2 - y^2$ situada arriba del plano xOy.

2. Determina el área de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, que se encuentra abajo del paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$.

3. Sea
$$S_k = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = k(x^2 + y^2),\, z \leq 4\right\},$$
donde k es un parámetro real positivo. Sea $A(k)$ el área de la superficie S_k. Calcula $A(k)$ y verifica que
$$\lim_{k \to +\infty} A(k) = 0.$$
Interpreta el resultado desde el punto de vista geométrico.

4. Calcula $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$, donde $\vec{F}(x, y, z) = 18\, z\, \vec{i} - 12\, \vec{j} + 3\, y \vec{k}$ y $\mathcal{S}$ es la parte del plano de ecuación $2x + 3y + 6z = 12$, situada en el primer octante.

5. Calcula el área de las siguientes porciones de superficie:
   (a) $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2},\ x^2 + y^2 + z^2 = 2az,\ a > 0\}$.
   (b) $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = x^2 + y^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$.

6. Calcula la integral de superficie $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} z^2\, d\mathcal{S}$, donde $\mathcal{S}$ es la porción de superficie cónica de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, comprendida entre los planos de ecuaciones $z = 1$ y $z = 3$.

7. Sean $\vec{V}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{k}$ y $\mathcal{S}$ dada por
$$\begin{cases} x = u \\ y = u^2 - v^2, \quad 0 \leq u, v \leq 1 \\ z = v \end{cases}$$
   (a) Calcula el elemento de área.
   (b) Calcula $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma$, donde $\mathcal{S}$ está orientada con la normal que tiene la segunda componente positiva.

8. Calcula la integral de superficie $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} x^2 yz\, d\mathcal{S}$, donde $\mathcal{S}$ es la parte del plano de ecuación $x + y + z = 1$, situada en el primer octante.

9. Calcula la integral de superficie $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z^2)\, d\mathcal{S}$, donde $\mathcal{S}$ es la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

10. Considera el volumen de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \geq z,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z \geq 0\}.$$

   (a) i. Representa geométricamente V.
   ii. Determina la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en el punto de coordenadas $(1/2, 1/2, 1/2)$.

   (b) Determina $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$, donde $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{\imath} + (x^2 - 2z)\vec{\kappa}$ es un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{S}$ está orientada para el exterior.

11. Sea S la frontera del sólido V definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2 + y^2,\ -2 \leq z \leq -1\}.$$

Sea $\vec{F}$ el campo vectorial definido por $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{\kappa}$. Calcula la integral de superficie $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$, donde $\vec{n}$ es la normal exterior y $d\sigma$ es el elemento de área de la superficie $\mathcal{S}$.

12. Calcula las siguientes integrales de superficie:

   (a) $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} (x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}) \cdot \vec{n}\ d\mathcal{S}$, donde $\mathcal{S}$ es la superficie frontera del sólido E dado por

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq 2\},$$

   ($a > 0$) orientada con la normal unitaria exterior.

   (b) $\displaystyle\iint_{S} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\mathcal{S}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = y^3 e^z \vec{i} - xy\vec{j} + x\text{arctg}\,(y)\vec{k}$ y $\mathcal{S}$ es la frontera del sólido acotado por los tres planos coordenados y por el plano $x + y + z = 1$, orientada con la normal unitária exterior.

13. Sea E la región sólida de frontera $\mathcal{S}$, acotada por las superficies de ecuaciones $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2$ y $x^2 + z = 4$ y sea

$$\vec{F}(x, y, z) = e^x y\vec{i} + (e^z - \frac{1}{2}e^x y^2)\vec{j} + 4z\vec{k}.$$

   (a) Determina el volumen de E.

   (b) Calcula $\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\mathcal{S}$, donde $\vec{n}$ es la normal unitaria exterior a $\mathcal{S}$.

14. Calcula $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} rot\,\vec{F} \cdot \vec{n}\, d\mathcal{S}$, donde $\vec{F} = 2y\vec{i} + z\vec{j} + 3\vec{k}$ y $\mathcal{S}$ es la frontera de la región sólida V dada por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 1 - x^2 - y^2,\ z \geq -\sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$$

orientada con la normal exterior.

15. Considera la superficie

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}, z \geq 0\},$$

y los campos vectoriales $\vec{F}_1(x, y, z) = x^2 y\,\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ y $\vec{F}_2(x, y, z) = -x^2\hat{k}$.

   (a) Verifica que $\vec{F}_2 = rot\,\vec{F}_1$.

   (b) Representa geométricamente la frontera de $\mathcal{S}$.

   (c) Calcula el valor de $\displaystyle\iint_{S} \vec{F}_2 \cdot \vec{n}\, d\mathcal{S}$, siendo $\hat{n}$ el campo vectorial normal a S con componente según Oz positiva.

16. Sean S la superficie del cubo unitário $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x,y,z \leq 1\}$ y $\vec{n}$ el campo vectorial normal y unitario, exterior a S. Calcula la integral de superficie $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\mathcal{S}$, donde $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es el campo definido por $\vec{F}(x,y,z) = (x^2,\, y^2,\, z^2)$.

17. Sean $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \;\wedge\; y \geq 0 \;\wedge\; 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$ y $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido por

$$\vec{F}(x,y,z) \;=\; x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} - z\,\vec{\kappa}.$$

Designando por $\mathcal{S}$ la frontera de B, calcula

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

siendo $\vec{n}$ el versor de la normal a $\mathcal{S}$ dirigida al exterior.