Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202) Primavera 2026

Tarea 1 (El espacio $\mathbb{R}^n$ - Repaso)

---

1. Demuestra que si $\vec{u}, \vec{v}$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces
   (a) $2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2 = |\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2$ (**ley del paralelogramo**.)
   (b) $|\vec{u} - \vec{v}|\,|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.
   (c) $4\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = |\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2$ (**identidad de polarización**.)

2. Sean $\vec{u}, \vec{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ tales que $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. Demuestra que el vector $\vec{u} + \vec{v}$ es ortogonal al vector $\vec{u} - \vec{v}$.

3. Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que $||\vec{u}| - |\vec{v}|| \leq |\vec{u} - \vec{v}|$.

4. (*Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz.*)
   Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que $|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle| \leq |\vec{u}|\,|\vec{v}|$ y $|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|$ si y sólo si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es linealmente dependiente.
   (*Sugerencia*: Considera la función $f(t) = \langle \vec{u} + t\vec{v}, \vec{u} + t\vec{v}\rangle$, donde $\vec{v} \neq \vec{0}$.)
   Observación: De la desigualdad anterior tenemos que, si $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $-1 \leq \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} \leq 1$. Podemos entonces definir el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como siendo el $\theta \in [0, \pi]$ tal que
   $$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}.$$

5. Sea $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ una base ortonormada de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que $\vec{v} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle \vec{v}, \vec{u}_i\rangle \vec{u}_i$.

6. Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ y $a \in \mathbb{R}$. Demuestra que
   (a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
   (b) $(a\vec{u}) \wedge \vec{v} = a(\vec{u} \wedge \vec{v})$
   (c) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es linealmente dependiente.
   (d) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$
   (e) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respecto al producto interno usual de $\mathbb{R}^3$.
   (f) $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
   (g) $|\vec{u} \wedge \vec{v}|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle - \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2$
   (h) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w}\rangle\vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle\vec{w}$
   (i) Si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es linealmente independiente, entonces $\{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ con orientación positiva.
   (j) Si $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ es una base (ordenada) ortonormada de $\mathbb{R}^3$ con orientación positiva, entonces $\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{w}$, $\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{u}$ y $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
   (k) $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w}\rangle = \det(\vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \vec{w})$
   (l) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{z}) = (\det(\vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \vec{z}))\,\vec{w} - (\det(\vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \vec{w}))\,\vec{z}$
   (m) Verdadero o falso: para cada $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, entonces $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$? Demuestra o dar un contra-ejemplo.