Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202) **Primavera 2026**

Tarea 2 (Funciones vectoriales: límites, continuidad y diferenciabilidad; la matriz Jacobiana)

---

1. Considera la función $\vec{x} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$\vec{x}(t) = \left(\exp(t^2), \frac{\ln t}{t^2-1}, \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right).$$
   (a) Indica el dominio en el que $\vec{x}$ es continua.
   (b) Determina $\lim\limits_{t\to 1} \vec{x}(t)$.

2. Considera la función $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$\vec{f}(u, v) = (\sqrt{1-u^2}\cos v, \sqrt{1-u^2}\operatorname{sen} v, 2u).$$
   (a) Determina el dominio en el que $\vec{f}$ es continua.
   (b) Indica los pontos donde $\vec{f}$ es diferenciable y calcula la matriz Jacobiana de $\vec{f}$ en un punto genérico.

3. Sea $\vec{r}$ la función vectorial con dominio $\mathbb{R}^2$ definida por
$$\vec{r}(x, y) = (x + 2y)\vec{i} + x\operatorname{sen}(\pi y)\vec{j} + xy^2\vec{k}.$$
   Determina $\dfrac{d(\vec{r} \circ q)}{dt}(t)$, donde $q(t) = (\operatorname{sen} t, t^2)$.

4. Sean $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\vec{h} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dos funciones vectoriales definidas, respectivamente, por $\vec{f}(u, v) = (\cos 2u, \operatorname{sen} 2v, \cos(u + v))$ y $\vec{h}(x, y, z) = (z, g(x, y))$, donde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1. Determina la matriz derivada de $\vec{f} \circ \vec{h}(x_0, y_0, z_0)$, con $z_0 = \pi$, $\nabla g(x_0, y_0) = \vec{i} + \vec{j}$ y $g(x_0, y_0) = \dfrac{\pi}{2}$, usando la regla de derivación de la función compuesta.

5. Considera $z = \operatorname{sen} y + f(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)$, donde $f \in C^1(\mathbb{R})$. Demuestra que
$$\frac{1}{\cos x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y}\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

6. Considera $z = yf(x^2 - y^2)$, donde $f \in C^1(\mathbb{R})$. Demuestra que
$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

7. Considera
$$u = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y + z) + \frac{1}{2}x^2yz + f(y - x, z - x),$$
   donde $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Demuestra que
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xyz.$$

8. Considera $z = \dfrac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$, donde $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Demuestra que

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right),$$

y considera el cambio de variables $x = u + v$, $y = u - v$. Calcula $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ en función de u y v, y verifica que

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}, \quad u \neq v.$$

10. Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 tales que se verifica la ecuación $F(x, g(x)) = 0$. Suponiendo que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$, calcula la derivada $g'(x)$.

11. Sea $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por $\vec{g}(x, y) = (1 + x^2 - 2y, 1 - xy)$ y $\vec{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 cuya matriz Jacobiana en el punto $(0, 0)$ está dada por $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determina la matriz Jacobiana de $\vec{h} \circ \vec{g}$ en el punto $(1, 1)$.

12. Calcula la derivada $D(f \circ g)(1, 1)$, donde

$$f(u, v) = \big(\tan(u - 1) - e^v, u^2 - v^2\big), \quad g(x, y) = \big(e^{x-y}, x - y\big).$$

13. Considera las funciones $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ y $\sigma(t) = F(\gamma(t))$. Calcula la derivada $\sigma'(t)$.

14. Considera la función $f(x, y, z) = e^x yz$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 tal que

$$g(0, 0) = (0, 1, 2) \quad \text{y} \quad Dg(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula la derivada $D_{\vec{v}}(f \circ g)(0, 0)$, donde $\vec{v} = (1, 2)$.

15. Considera la función $\sigma(x) = f(x, x^2 + 1)$, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es de classe C^1 y tal que

$$Df(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcula la derivada $\sigma'(0)$.