Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202) Primavera 2026

Tarea 3 (Curvas regulares)

---

1. Considera un función C^1:

$$\vec{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad (u,v)\mapsto (f(u,v),g(u,v),h(u,v))=(x,y,z).$$

   (a) Aplica la teorema de funcion inversa para mostrar que cuando el determinante:

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v}\end{pmatrix}$$

   no es cero para algún valor u_0, v_0, entonces el funcion $\vec{f}$ con valores de u, v alrededor u_0, v_0, parametriza un parche de un superficie forma grafical $z = H(x, y)$ alrededor el punto $(f(u_0, v_0), g(u_0, v_0), h(u_0, v_0)) = (x_0, y_0, z_0)$.

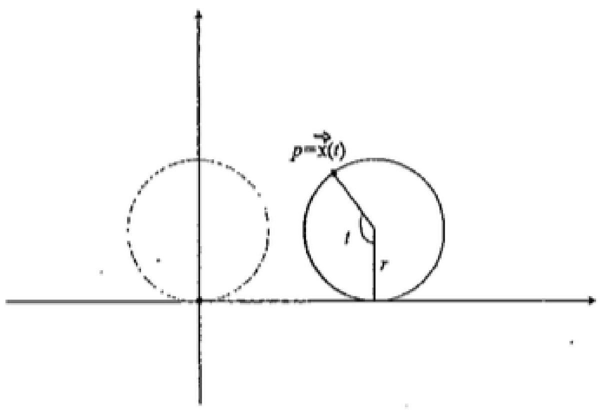
   (b) Usar la regla de cadena para mostrar que la vector normal, $(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, -1)$ a la grafica $z = H(x, y)$ del parte anterior es proporcional al producto vectorial:

$$(\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial h}{\partial u})\wedge(\frac{\partial f}{\partial v},\frac{\partial g}{\partial v},\frac{\partial h}{\partial v}).$$

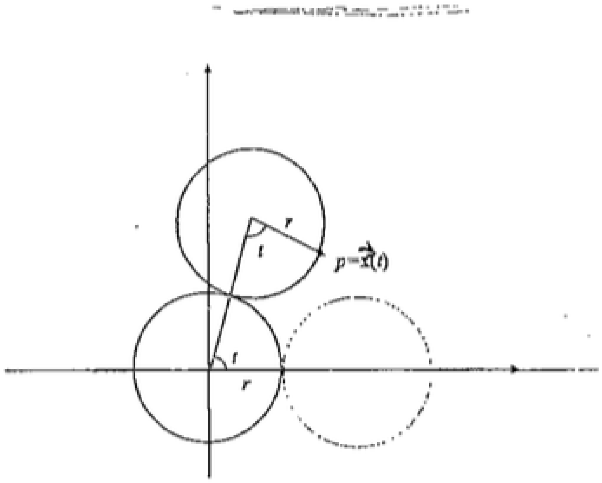
No siempre una curva está dada por una función. A veces, sólo está dada la traza C de la curva, y el ejercicio consiste en encontrar una curva que tenga C como su traza.

2. (Cicloide.) Sea p un punto de la circunferencia de la rueda de una bicicleta en movimento rectilíneo. Describa la trayectoria de p mediante una curva.

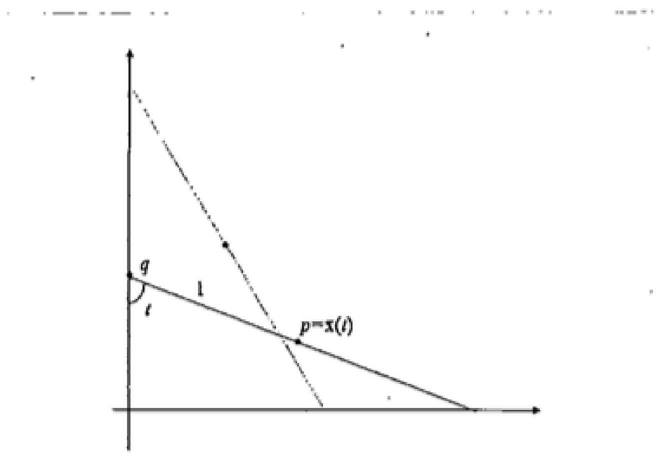
   Sugerencia: Teóricamente, la trayectoria del punto p es una curva en un plano geométrico (el plano al que pertenece la circunferencia). Usa la sugerencia dada en la siguiente figura para vericar que $\vec{x}(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto\vec{x}(t)=r(t-\operatorname{sen}t, 1-\cos t)$, es una curva cuya traza es la trayectoria del punto p. Dibuja la cicloide y encuentra los puntos singulares de $\vec{x}$.



3. (Cardioide.) Si el movimiento de la circunferencia del ejercicio anterior ,en lugar de ser a lo largo de una recta (el eje de las abscisas, en la figura anterior), es a lo largo de una segunda circunferencia con el mismo radio, se obtiene una curva llamada cardioide. Con la ayuda de la siguiente figura, comprueba que $\vec{x}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \vec{x}(t) = r(2\cos t - \cos 2t, 2\text{sen}\, t - \text{sen}\, 2t)$ es una curva cuya traza describe la trayectoria del punto p. Dibuja la cardioide y encuentra los puntos singulares de $\vec{x}$.



4. ('Trammel of Archimedes'.) Un albañil (p) está subiendo una escalera que se apoya en una pared. Cuando p se detiene a una distancia 1 de la parte superior de la escalera, ésta empieza a deslizar a lo largo de la pared. La siguiente figura idealiza la situación.



Describa la trayectoria de p mediante una curva.

La clase de una curva, al igual que su regularidad, no puede ser deducida sólo por la traza de la curva, como demuestran los siguientes ejemplos.

5. Demuestra que la función definida por

$$\vec{x}(t) = \begin{cases} (t^2, t^2) & \text{si} \quad t \geq 0 \\ (-t^2, t^2) & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

   es una curva de clase C^1, pero no es una curva de clase C^2. Dibuja la traza de la curva $\vec{x}$ y compárala con la traza de la curva $t \mapsto (t, |t|)$.

6. Dibuja la traza de la curva $\vec{x}(t) = (t^3, t^3)$ y demuestra que $\vec{x}$ no es una curva regular.

7. En puntos singulares de una curva, aunque no exista por definición la recta tangente, puede existir la recta límite de la familia de rectas $\{\vec{y}_h\}$, donde $\{\vec{y}_h\}$ es la recta que contiene los puntos $\vec{x}(t+h)$ y $\vec{x}(t)$, cuando h tiende a 0. Averigua este hecho teniendo en cuenta la curva $\vec{x}(t) = (t^3, t^2)$.

   Sugerencia: $t = 0$ es un punto singular de $\vec{x}$ y $\dfrac{\vec{x}(h) - \vec{x}(0)}{h^2}$ es un vector director de la recta $\vec{y}_h$ que contiene los puntos $\vec{x}(h)$ y $\vec{x}(0)$.