Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202) **Primavera 2026**

Tarea 4 (Curvas regulares; reparametrizaciones)

---

1. Demuestra que $\vec{x}(t) = (\operatorname{sen} 3t \cos t, \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} t)$ es una curva regular y encuentra la ecuación de la recta tangente en el punto $t = \pi/3$. Dibuja la traza de la curva.

2. ¿ Para cuáles valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ la curva $\vec{x}_a(t) = (t^3 - at, t^2 - a)$ es una curva regular? Dibuja las trazas de $\vec{x}_0$ y $\vec{x}_4$.

3. Averigua si las siguientes curvas son regulares:

   (a) $\vec{x}_1(t) = (\cos t, 1 - \cos t - \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t)$.

   (b) $\vec{x}_2(t) = (2 \operatorname{sen}^2 t, 2 \operatorname{sen}^2 t \tan t, 0)$.

   (c) $\vec{x}_3(t) = (\cos t, \cos^2 t, \operatorname{sen} t)$.

4. Encuentra la ecuación de la recta tangente a las curvas mencionadas en el ejercicio anterior en el punto $t = \pi/4$.

5. Sea $\vec{x}(t) : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \vec{x}(t) = \left(\operatorname{sen} t, \cos t + \ln \tan \frac{t}{2}\right)$. Demuestra que $\vec{x}\,'(t) = \vec{0}$ si y sólo si $t = \pi/2$.

6. Sea $\vec{x} : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular tal que $\vec{x}\,'' = \vec{0}$. ¿ Qué se puede decir acerca de la traza de $\vec{x}$?

7. Sea $\vec{x} : I \to \mathbb{R}^n$ una curva de clase C^1 tal que $\vec{0} \notin \operatorname{Codom}(\vec{x})$ y sea $a \in I$ tal que $\forall\, t \in I$, $|\vec{x}(a)| \leq |\vec{x}(t)|$. Demuestra que, si a es un punto regular de $\vec{x}$, entonces $\langle \vec{x}(a), \vec{x}\,'(a) \rangle = 0$.

   Sugerencia: Considera la función $I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto |\vec{x}(t)|$ y su derivada en el punto a.

8. (Espiral logarítmica.) Sea $\vec{x}(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \operatorname{sen} t)$.

   (a) Calcula la longitud de la espiral en el intervalo $[0, +\infty)$.

   (b) Demuestra que el ángulo entre $\vec{x}$ y $\vec{x}\,'$ es constante. Dibuja la traza de la curva.

9. Sea $\vec{x} : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. Demuestra que, si existe $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\forall\, t \in I$, $\vec{x}(t) - \vec{c}$ es ortogonal a $\vec{x}\,'(t)$, entonces la traza de $\vec{x}$ está contenida en una esfera.

   Sugerencia: $\vec{c}$ es el centro de la esfera.

10. Sea $\vec{x} : I \to \mathbb{R}^n$ una curva. Demuestra que, si existe una sucesión estrictamente monótona (t_k) en I que converge en I y tal que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\vec{x}(t_k) = \vec{u}$, entonces $\vec{x}$ no es una curva regular.

    Sugerencia: Demuestra que $\vec{x}\,'(\lim_{k\to\infty} t_k) = \vec{0}$.

11. Realiza el estudio analítico y representa gráficamente las siguientes curvas:

    (a) $\vec{x}(t) = \left(a \cos^3 t, a \operatorname{sen}^3 t\right)$, donde $a > 0$.

    (b) $\vec{x}(t) = \left(\cos t + \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t\right)$.

    (c) $\vec{x}(t) = (2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t, 2 \cos t - \cos 2t)$.

    (d) $\vec{x}(t) = (\operatorname{sen} 2t, \cos 3t)$.

    (e) $\vec{x}(t) = (\cos t, t + \operatorname{sen} t)$.

    (f) $\vec{x}(t) = (2p \cos t + p \cos 2t, 2p \operatorname{sen} t - p \operatorname{sen} 2t)$, siendo p una constante $p > 0$,

12. Haz un esbozo de las gráficas $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 4,\ x \leq 0\}$ y de la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + 2t^2\vec{k}$, $t \in [0,1]$.

13. Sean $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$ y $\vec{\beta}(t) = \left(t^3, \sqrt{1-t^6}\right)$, $-1 \leq t \leq 1$. Determina las lugares geometrical en $\mathbb{R}^2$ de las cuales $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ son parametrizaciones. ¿ Cuáles son regulares? ¿ Cuál es el sentido de la trayectoria? Reparametriza de modo que ambas tengan el mismo sentido.

14. Supón que la posición de una partícula está dada en función del tiempo t por

$$x = 3\operatorname{sen} t, \quad y = 2\cos t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

y la posición de una segunda partícula está dada por

$$x = -3 + \cos t, \quad y = 1 + \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

   (a) Dibuja las trazas de las trayectorias de ambas partículas. ¿ Cuántos puntos de intersección existen?
   (b) ¿ Algunos de eses puntos son puntos de colisión? Si es así, determina dichos puntos.
   (c) Describe lo que sucede si la trayectoria de la segunda partícula está dada por

$$x = 3 + \cos t, \quad y = 1 + \operatorname{sen} t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

15. Una partícula se mueve en el espacio siguiendo una trayectoria dada por

$$x = t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = \cos 2t + 1 \qquad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Calcula la velocidad en cada instante de tiempo.

16. Averigua si las siguientes funciones pueden ser una reparametrización de una curva.
   (a) $g : (0,1) \to (1,2)$, $s \mapsto g(s) = 1 + s^2$
   (b) $g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $s \mapsto g(s) = 1 + \operatorname{sen}^2 s$

17. Demuestra que la función $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $s \mapsto g(s) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}s\right)$ es una reparametrización de toda la curva de dominio $\mathbb{R}$.

18. Averigua si la función $g : (0,\infty) \to (0,1)$, $s \mapsto g(s) = \dfrac{s^2}{s^2+1}$ puede ser una reparametrización de una curva.

19. Considera la función $g : \mathbb{R} \setminus \left\{2, \dfrac{4k}{1+2k}, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $s \mapsto g(s) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2-s}\right)$.
   (a) Comenta la siguiente afirmación: “g no puede ser una reparametrización de una curva”.
   (b) Determina una posible restricción de g de modo que esta sea una reparametrización de una curva. Justifica tu respuesta.

20. En el conjunto de las curvas parametrizadas, sea $\sim$ la relación binaria definida por

$$\vec{x} \sim \vec{y} \iff \exists \text{ reparametrización } g \text{ de } \vec{x} \text{ tal que } \vec{y} = \vec{x} \circ g.$$

Comprueba que $\sim$ es una relación de equivalencia. Justifica, entonces, que una clase de equivalencia no es más que una curva geométrica.