

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202)

Primavera 2026

Tarea 5 (Curvas regulares: Longitud de arco)

1. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $r : I \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto r(t)$ una función de clase C^1 , y

$$\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{x}(t) = (r(t) \cos t, r(t) \sin t).$$

- (a) Demuestra que si $r(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, entonces $\vec{x}$ es una curva regular.
- (b) ¿La siguiente afirmación es verdadera o falsa? “Si $\vec{x}$ es una curva regular, entonces $r(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ ”. En caso de que sea verdadera, demuéstalo; y en caso de que sea falsa, da un contraejemplo.
2. Calcula la longitud del segmento de curva $\vec{x}|_{[0,5]}$, donde $\vec{x}(t) = (2 \cosh 3t, -2 \sinh 3t, 6t)$.
3. Sea $\vec{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un segmento de curva tal que $\vec{\alpha}(a) \neq \vec{\alpha}(b)$. Demuestra que para todo $\vec{v} \in S^2 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{u}| = 1\}$ se verifica

$$\langle \vec{\alpha}(b) - \vec{\alpha}(a), \vec{v} \rangle = \int_a^b \langle \vec{\alpha}'(t), \vec{v} \rangle dt \leq \int_a^b |\vec{\alpha}'(t)| dt.$$

Verifica que, substituyendo $\vec{v}$ por $\frac{\vec{\alpha}(b) - \vec{\alpha}(a)}{|\vec{\alpha}(b) - \vec{\alpha}(a)|}$ en la desigualdad anterior se obtiene

$$|\vec{\alpha}(b) - \vec{\alpha}(a)| \leq \int_a^b |\vec{\alpha}'(t)| dt.$$

Da una interpretación geométrica de esta última desigualdad.

4. Sea $\vec{x}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$. Demuestra que $\vec{x}$ es una curva regular y calcula la longitud del segmento de curva $\vec{x}|_{[0,1]}$.
5. Sea $\vec{x}(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$.
- (a) Demuestra que $\vec{x}$ es una curva regular y calcula la longitud del segmento de curva $\vec{x}|_{[0,1]}$.
- (b) Demuestra que el ángulo θ entre $(1, 0, 1)$ y $\vec{x}'(t)$ es constante y determina θ .
6. Sea $\vec{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \vec{x}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$.
- (a) Demuestra que $\vec{x}$ es una curva parametrizada, diferenciable y regular.
- (b) Calcula la longitud del segmento de curva $\vec{x}(t)$, $0 \leq t \leq 1$.
- (c) Demuestra que existe un vector $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que el ángulo θ entre $\vec{u}_0$ y $\vec{x}'(t)$ es constante, y determina θ .
7. Reparametriza las siguientes curvas por la longitud de arco.
- (a) $\vec{x}(t) = (r \cos t, r \sin t, 0)$, donde $r > 0$.
- (b) $\vec{x}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$.
- (c) $\vec{x}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$.

8. Sea $\vec{x}(t) = (\sin t \cos t, \sin^2 t, \cosh t)$.
- Demuestra que $\vec{x}$ es una curva regular.
 - Calcula la longitud del segmento de curva $\vec{x}|_{[0, \ln 2]}$.
 - Da una reparametrización g de $\vec{x}$ tal que $\vec{x}_g$ sea una curva parametrizada por la longitud del arco.
9. Sea $\vec{x}(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\ln t), \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\ln t), \ln \sqrt{t} \right)$, donde $t > 0$.
- Demuestra que $\vec{x}$ es una curva regular.
 - Sea $a > 0$. Calcula la longitud del segmento de curva $\vec{x}|_{[1, e^a]}$.
 - Da una reparametrización g de $\vec{x}$ tal que $\vec{x}_g$ sea una curva parametrizada por la longitud del arco.
10. Sea $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \vec{x}(t)$ una curva regular de clase C^k , con $k \geq 3$, definida en el intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ y $t_0 \in I$.

- Demuestra que $h(t) = \int_{t_0}^t |\vec{x}'(u)| du$, con $t \in I$, es invertible y que

$$h'' = \frac{\langle \vec{x}', \vec{x}'' \rangle}{|\vec{x}'|^3}.$$

- Sea g la función inversa de h . Demuestra que g es una reparametrización de la curva $\vec{x}$ y que $\vec{y} = \vec{x} \circ g$ es una curva parametrizada por la longitud del arco. Justifica la siguiente afirmación: “ $\vec{y}$ es una curva de clase C^k ”.
- Sea $s = h(t)$ ($\Leftrightarrow t = g(s)$). Demuestra que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g}{ds^2}(s) &= -\frac{\langle \vec{x}'(t), \vec{x}''(t) \rangle}{|\vec{x}'(t)|^4} \quad \text{y que} \\ \frac{d^2 \vec{y}}{ds^2}(s) &= \frac{1}{|\vec{x}'(t)|^2} \vec{x}''(t) - \frac{\langle \vec{x}'(t), \vec{x}''(t) \rangle}{|\vec{x}'(t)|^4} \vec{x}'(t). \end{aligned}$$

- De las ecuaciones de Frenet-Serret, demuestra que la curvatura de $\vec{y}$ está dada por $\kappa(s) = \frac{|\vec{x}'(t) \wedge \vec{x}''(t)|}{|\vec{x}'(t)|^3}$, $t = g(s)$.
- Demuestra que existen funciones λ, μ tales que

$$\frac{d^3 \vec{y}}{ds^3}(s) = \lambda(t) \vec{x}'(t) + \mu(t) \vec{x}''(t) + \frac{1}{|\vec{x}'(t)|^3} \vec{x}'''(t)$$

y que

$$\det \left(\frac{d\vec{y}}{ds}(s), \frac{d^2 \vec{y}}{ds^2}(s), \frac{d^3 \vec{y}}{ds^3}(s) \right) = \frac{1}{|\vec{x}'(t)|^6} \det(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t)),$$

$t = g(s)$. De las ecuaciones de Frenet-Serret, demuestra que la torsión de la curva $\vec{y}$ en los puntos s tales que $\kappa(s) \neq 0$ está dada por

$$\tau(s) = \frac{\det(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t))}{|\vec{x}'(t) \wedge \vec{x}''(t)|^2}.$$