

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202)

Otoño 2025

Tarea 6 (El n -edro y las ecuaciones de Frenet)

1. Sea $t \mapsto \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ una curva planar regular.

(a) Demuestra que (e_1, e_2) , donde

$$e_1 = \frac{1}{|\vec{x}'|} (x'_1, x'_2) \quad \text{y} \quad e_2 = \frac{1}{|\vec{x}'|} (-x'_2, x'_1)$$

es el diedro de Frenet a lo largo de $\vec{x}$.

(b) Del inciso anterior se tiene que existe una y solo una curvatura κ de la curva $\vec{x}$. Demuestra que

$$\kappa = \frac{\det(\vec{x}' \quad \vec{x}'')}{|\vec{x}'|^3}.$$

2. Verifica que las curvas $\vec{x}$, $\vec{y}$ y $\vec{z}$ definidas a continuación son curvas regulares y determina el diedro de Frenet y la curvatura de cada una de ellas.

(a) $\vec{x}(t) = (1 + t, t)$.

(b) $\vec{y}(t) = (1 + r \cos t, r \sin t)$, donde $r > 0$.

(c) $\vec{z}(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$.

Establece una relación entre la traza de cada curva y su curvatura.

3. Considera la cicloide $\vec{x} : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \vec{x}(t) = r(t - \sin t, 1 - \cos t)$. Calcula el diedro de Frenet y la curvatura de $\vec{x}$. ¿Para qué valor (o valores) de $t \in (0, 2\pi)$ el valor absoluto de la curvatura alcanza su mínimo?
4. Sea $s \mapsto \vec{x}(s) \in \mathbb{R}^2$ una curva planar regular parametrizado por longitud del arco. La *curva caustica* de $\vec{x}(s)$ es la curva planar parametrizado por:

$$s \mapsto \vec{x}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} N(s) = \vec{c}(s)$$

donde $T(s) = \vec{x}'(s)$, $N(s) = \frac{\vec{x}''(s)}{|\vec{x}''(s)|}$ el diedro de Frenet-Serret a lo largo la curva $\vec{x}(s)$.

- (a) Considera $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(s, t) \mapsto \vec{x}(s) + tN(s) = F(s, t)$. Determina el lugar geometrical en el plano st donde $\det DF(s, t) = 0$ como curva implícita.
- (b) Muestra que el imagen bajo F del lugar geometrical en al parte (a) anterior es la curva caustica de $\vec{x}(s)$

Comentario: El lugar geometrical definido por partes (a), (b) es llamado el envolvente ('envelope') de las líneas normales a la curva trazado por $\vec{x}(s)$ (este ejercicio muestra que tal envolvente es la misma lugar geometrical que el lugar trazado por los centros de curvatura de la curva).

5. Determina la curva caustica del cicloide parametrizado: $t \mapsto \vec{x}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

6. Sea $s \mapsto \vec{x}(s) \in \mathbb{R}^2$ una curva planar regular parametrizado por longitud del arco. Para $l > 0$ un constante, considera la asociado *curva involuta* de $\vec{x}(s)$ parametrizado como:

$$s \mapsto \vec{x}(s) + (l - s)\vec{x}'(s) = \vec{y}(s).$$

- (a) Calcula la curvatura de $\vec{y}(s)$.
 (b) Determina la curva caustica de $\vec{y}(s)$.
7. Dado $l > 0$ constante, determina las curvas involutas del círculo unitario.
8. Sea $t \mapsto \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ una curva espacial 2-regular (es decir $\vec{x}'$ y $\vec{x}''$ son independientes).
 (a) Demuestra que (e_1, e_2, e_3) , donde

$$e_1 = \frac{\vec{x}'}{|\vec{x}'|}, \quad e_2 = \frac{e_1'}{|e_1'|} \quad \text{y} \quad e_3 = e_1 \wedge e_2$$

es el triedro de Frenet a lo largo de $\vec{x}$.

- (b) Del inciso anterior se tiene que existen dos curvaturas, κ y τ , de la curva $\vec{x}$. Demuestra que

$$\kappa = \frac{|\vec{x}' \wedge \vec{x}''|}{|\vec{x}'|^3} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{\det(\vec{x}' \quad \vec{x}'' \quad \vec{x}''')}{|\vec{x}' \wedge \vec{x}''|^2}.$$

9. (Hélice). Sean $r, h > 0$ y $\vec{x}(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$. Demuestra que $\vec{x}(t)$ es una curva espacial 2-regular (es decir $\vec{x}'$ y $\vec{x}''$ son independientes). Calcula el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión. Dibuja la traza de la hélice.
10. Sea $t \mapsto \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ una curva espacial 2-regular (es decir $\vec{x}'$ y $\vec{x}''$ son independientes). Demuestra que la traza de $\vec{x}$ está contenida en un plano si y sólo si $\tau = 0$.