

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202)

Otoño 2025

Tarea 7 (Curvas en el plano y en el espacio)

Curvas en el plano

1. Demuestra que si $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto \vec{x}(s)$ es una curva parametrizada por la longitud del arco y $\theta(s)$ es el ángulo entre la tangente a la curva $\vec{x}$ en el punto s y el eje Ox , entonces la curvatura κ de la curva $\vec{x}$ satisface $\kappa = \theta'$.
2. Sea $\vec{x}(t) = (r(t) \cos t, r(t) \sin t)$, donde r es una función de clase C^2 de un intervalo abierto I a $\mathbb{R}$. Demuestra que, si $\vec{x}$ es una curva regular, entonces la curvatura de $\vec{x}$ es

$$\kappa = \frac{2(r')^2 - rr'' + r^2}{[(r')^2 + r^2]^{3/2}}.$$

3. Sea $\vec{x}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$.
 - (a) Demuestra que $\vec{x}$ no es una curva regular.
 - (b) Calcula la longitud del segmento de curva $\vec{x}(t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
 - (c) Calcula la curvatura (plana) de la curva $\vec{x}$.
4. (a) Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $a \in I$ y $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Demuestra que

$$\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \vec{x}(t) = \left(\int_a^t \cos f(s) ds, \int_a^t \sin f(s) ds \right),$$

donde

$$\forall s \in I \quad f(s) = \int_a^s \kappa(t) dt$$

es una curva parametrizada por la longitud del arco con curvatura κ .

- (b) Encuentra una curva en $\mathbb{R}^2$, parametrizada por la longitud del arco, con curvatura

$$\kappa : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Curvas en el espacio

5. Sea $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva de clase C^3 parametrizada por la longitud del arco definida en el intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ y tal que $\kappa(s) \neq 0$, $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$. Para todo $a \in \mathbb{R}$, sea $\vec{x}_a$ la curva definida por $\vec{x}_a(s) = \vec{x}(s) + ae_2(s)$, $s \in I$, donde $e_2(s)$ es el vector normal de la curva $\vec{x}$ en el punto s .
 - (a) Determina para qué valores del parámetro a la curva $\vec{x}_a$ es una curva regular.
 - (b) Determina, si posible, el vector tangente, el vector normal y la curvatura de la curva $\vec{x}_a$ en el punto $s \in I$.

6. (a) Demuestra que $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2.$$

- (b) Sea $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular de clase C^2 y $\nu(t) = |\vec{x}'(t)|$. Demuestra que la curvatura κ de la curva $\vec{x}$ satisface

$$\kappa = \frac{\sqrt{\langle \vec{x}'', \vec{x}'' \rangle - (\nu')^2}}{\nu^2}.$$

(Sugerencia: Usa el resultado del inciso (a).)

7. Sean I un intervalo abierto y $\vec{e} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 tal que $\forall t \in I$, $|\vec{e}(t)| = |\vec{e}'(t)| = 1$ y $t_0 \in I$. Demuestra que la curva $\vec{x}$ definida por

$$\vec{x}(t) = \int_{t_0}^t \vec{e}(u) du, \quad t \in I$$

tiene curvatura constante igual a 1.

8. Sea $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva 2-regular parametrizada por la longitud del arco y (e_1, e_2, e_3) el triedro de Frenet de $\vec{x}$. Demuestra que existe una función $\vec{w} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $e'_1 = \vec{w} \wedge e_1$, $e'_2 = \vec{w} \wedge e_2$, $e'_3 = \vec{w} \wedge e_3$. ($\vec{w}$ se llama *campo vectorial de Darboux*).

9. Sea $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s \mapsto \vec{x}(s)$ una curva 2-regular de clase C^4 parametrizada por la longitud del arco. Demuestra que

- (a) Si $\vec{x}''' + \kappa^2 \vec{x}' = \vec{0}$, entonces la traza de $\vec{x}$ es una circunferencia.
(b) Si $\vec{x}'''' = \vec{0}$, entonces la curvatura y la torsión de $\vec{x}$ son constantes.
(c) Si la traza de $\vec{x}$ pertenece a un plano, entonces

$$\vec{x}'''' + \frac{\kappa^3 - \kappa''}{\kappa} \vec{x}'' + 3\kappa\kappa' \vec{x}' = \vec{0}.$$

10. Sean x_1, x_2 funciones reales de clase C^3 de un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ y

$$\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), 0), \quad \vec{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \vec{y}(t) = (x_1(t), x_2(t)).$$

Demuestra que, si $\vec{x}$ es una curva 2-regular, entonces la curvatura de $\vec{x}$ es igual al valor absoluto de la curvatura de $\vec{y}$, es decir, a pesar del signo, las dos curvas tienen la misma curvatura.

11. Sea $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva 2-regular parametrizada por la longitud del arco y con torsión positiva y sean $s_0 \in I$ y $\vec{y}$ la curva definida por

$$\vec{y}(s) = \int_{s_0}^s e_3(u) du,$$

donde (e_1, e_2, e_3) es el triedro de Frenet de la curva $\vec{x}$. Demuestra que el triedro de Frenet de la curva $\vec{y}$ es $(e_3, -e_2, e_1)$, y que la curvatura y la torsión de la curva $\vec{y}$ son, respectivamente, la torsión y la curvatura de la curva $\vec{x}$.

12. Sean κ, τ la curvatura y la torsión de la curva 2-regular $\vec{x}$ y sea (e_1, e_2, e_3) el triedro de Frenet de la curva $\vec{x}$. Demuestra que

$$\kappa\tau = -\frac{\langle e'_1, e'_3 \rangle}{|\vec{x}''|^2}.$$

13. Sea $\vec{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva 2-regular tal que:

- $\vec{x}$ es parametrizada por la longitud del arco y $\vec{x}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0)$.
- El campo vectorial binormal de $\vec{x}$ está dado por

$$\vec{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sin t - \cos t, \sin t + \cos t, 2).$$

- La torsión τ de $\vec{x}$ es siempre negativa, es decir, $\tau(t) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Determina:

- (a) La torsión y el vector normal de $\vec{x}$ (en todo el punto $t \in \mathbb{R}$).
- (b) El vector tangente de $\vec{x}$ (en todo el punto $t \in \mathbb{R}$).
- (c) La expresión analítica de $\vec{x}$.
- (d) La curvatura de $\vec{x}$ (en todo el punto $t \in \mathbb{R}$).

14. Sea $\vec{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva 2-regular tal que:

- $\vec{x}$ es parametrizada por la longitud del arco y $\vec{x}(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 0)$,
- la torsión τ de $\vec{x}$ es una función positiva, es decir, $\tau(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$,
- el campo vectorial binormal de $\vec{x}$ (en todo el punto $t \in \mathbb{R}$) está dado por

$$\vec{B}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t, -\cos t, 1).$$

Determina:

- (a) La torsión y el vector normal de $\vec{x}$.
- (b) La curvatura de $\vec{x}$ y el vector tangente de $\vec{x}$.
- (c) La expresión analítica de $\vec{x}$ y su traza.

15. Sea $\vec{x}(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \ln t, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \ln t, \ln \sqrt{t} \right)$, donde $t > 0$.

- (a) Demuestra que $\vec{x}$ es una curva regular.
- (b) Sea $a > 0$. Calcula la longitud del segmento de la curva $t \mapsto \vec{x}(t)$, donde $t \in [1, e^a]$.
- (c) Determina una reparametrización g de $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \circ g$ es una curva parametrizada por la longitud del arco.
- (d) Determina la curvatura y la torsión de $\vec{x}$ en el punto $t = 1$.

16. Sea $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s \mapsto \vec{x}(s)$ una función de clase C^1 definida en el intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ y tal que $|\vec{x}(s)| = |\vec{x}'(s)| = 1$ para todo $s \in I$. Sean $s_0 \in I$ y $\vec{y}$ la curva definida por

$$\vec{y}(s) = \int_{s_0}^s \vec{x}(u) du, \quad s \in I.$$

- (a) Demuestra que $\{\vec{x}, \vec{x}', \vec{x} \wedge \vec{x}'\}$ es el triedro de Frenet de la curva $\vec{y}$ y que la curvatura de $\vec{y}$ es igual a 1.
- (b) Demuestra que la curvatura de la curva $\vec{x}$ es igual a $\sqrt{1 + \tau^2}$, donde τ es la torsión de la curva $\vec{y}$.

17. Sea $\vec{x} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular de clase C^5 parametrizada por la longitud del arco y tal que $\forall t \in I, \kappa(t)\tau(t) \neq 0$, donde κ y τ son, respectivamente, la curvatura y la torsión de $\vec{x}$. Sea (e_1, e_2, e_3) el triedro de Frenet de $\vec{x}$. Demuestra las siguientes igualdades:

(a) $\det(e'_1 \ e''_1 \ e'''_1) = \kappa^3(\kappa\tau' - \kappa'\tau)$.

(b) $\det(e'_3 \ e''_3 \ e'''_3) = \tau^3(\kappa'\tau - \kappa\tau')$.

18. Sea $\vec{x} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva 2-regular de clase C^4 parametrizada por la longitud del arco y tal que $\forall t \in I, \kappa(t)\tau(t) \neq 0$, donde κ y τ son, respectivamente, la curvatura y la torsión de $\vec{x}$. Sea (e_1, e_2, e_3) el triedro de Frenet de $\vec{x}$. Demuestra las siguientes igualdades:

(a) $\det(e_3 \ e'_1 \ e''_2) = \kappa\kappa'$.

(b) $\det(e_1 \ e'_2 \ e''_3) = \tau\tau'$.

19. Sea $\vec{x}$ una curva de clase C^4 en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por la longitud del arco y de curvatura $\kappa \neq 0$ y torsión τ . Sean $\bar{\kappa}, \bar{\tau}$ la curvatura y torsión de la curva $\vec{y} = \vec{x}'$. Demuestra que

$$\bar{\kappa} = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}, \quad \bar{\tau} = \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{\kappa \left(1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2\right)}.$$

20. Sea $\vec{x} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{x}(t)$ una curva de clase C^1 parametrizada por la longitud del arco tal que $|\vec{x}(t)| = 1$ y de curvatura $\kappa(t) > 1$, para todo $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Sean $t_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\vec{y}$ la curva definida por

$$\vec{y}(t) = a \sec(t + t_0) \vec{x}(t),$$

donde $a > 0$ es una constante. Demuestra que

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{a} \cos^3(t + t_0) \sqrt{\kappa^2 - 1},$$

donde $\bar{\kappa}$ es la curvatura de la curva $\vec{y}$.