Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202) Primavera 2026

Tarea 8 (Integrales de línea)

---

1. Sea $\vec{F} = (3x^2+6y)\vec{i} - 14yz\vec{j} + 20xz^2\vec{k}$. Calcula $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \bullet d\vec{r}$ de (0, 0, 0) hasta (1, 1, 1), a lo largo de las siguientes trayectorias Γ:
   (a) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.
   (b) Los segmentos de línea que unen (0, 0, 0) con (1, 0, 0), luego con (1, 1, 0) y, finalmente, con (1, 1, 1).
   (c) El segmento que une (0, 0, 0) con (1, 1, 1).

2. Calcula $\displaystyle\int_\Gamma xy\, ds$, donde:
   (a) Γ es el arco de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ $(x,\, y \geq 0)$.
   (b) Γ es el cuadrado definido por $|x| + |y| = 1$.

3. Calcula $\displaystyle\int_\Gamma e^{\sqrt{y}}\, ds$, donde Γ es el arco dado por $\vec{r} = \vec{i} + t^2\vec{j} + 3\vec{k}$, con $-1 \leq t \leq 0$.

4. Considera la siguiente integral doble:

$$I = \int_{-2}^{-1} \left\{ \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\, dy \right\} dx + \int_{-1}^{0} \left\{ \int_0^{\sqrt{3}x^2} f(x,y)\, dy \right\} dx$$

   donde $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en un dominio D de integración.
   (a) i. Describe analíticamente y representa geométricamente el dominio D.
       ii. Cambia el orden de integración.
   (b) Sea Γ la frontera de D, orientada en el sentido directo.
       i. Propón una parametrización (seccionalmente regular) para Γ.
       ii. Calcula el valor de la siguiente integral:

$$\oint_\Gamma (x^2 + 2xy)\, dx + y^2\, dy.$$

5. Calcula

$$\oint_C (x+y)^2\, dx - (x-y)^2\, dy,$$

   a lo largo de la curva C cerrada y orientada positivamente, que es la frontera de la región plana D definida por $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \operatorname{sen} x\big\}$.

6. Determina el trabajo total realizado en el desplazamiento de una partícula dentro de un campo de fuerzas dado por $\vec{F} = 3xy\vec{i} - 5z\vec{j} + 10x\vec{k}$, a lo largo de la curva definida por $x = t^2+1$, $y = 2t^2$, $z = t^3$, desde $t = 1$ hasta $t = 2$.

7. Calcula

$$\oint_C x^2y\,dx - xy^2\,dy,$$

a lo largo de la curva C, cerrada y orientada positivamente, que es la frontera de la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

8. Considera las superficies dadas por

$$\mathcal{S}_1 : x^2 + 2y^2 + z^2 \ = \ 4 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{S}_2 : z \ = \ \sqrt{3}$$

y sea Γ la línea de intersección de $\mathcal{S}_1$ con $\mathcal{S}_2$. Calcula el trabalho realizado por el campo

$$\vec{G}(x, y, z) = -y^2\vec{\imath} + xy\vec{\jmath} + (z^2 + 1)\vec{k}$$

al mover una partícula a lo largo de la curva Γ, orientada en el sentido directo.

9. Calcula las siguientes integrales curvilíneas a lo largo de las curvas mencionadas:

   (a) $\displaystyle\int_\Gamma -y\,dx + x\,dy$, donde Γ es la frontera del dominio D definido por

   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq y \leq a,\ -a \leq x \leq -a + 2\sqrt{a^2 - y^2},\ a > 0\},$$

   orientada en el sentido directo.

   (b) $\displaystyle\int_\Gamma (y - \operatorname{sen} x)\,dx + \cos x\,dy$, donde Γ es el contorno triangular de vértices $A = (0, 0)$, $B = (\pi/2, 0)$, $C = (\pi/2, 1)$, recorrido en el sentido antihorario.

   (c) $\displaystyle\int_\gamma x\,dx + y\,dy + z\,dz$, donde $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

10. Calcula

    (a) $\displaystyle\int_\Gamma (x + y)\,ds$, donde C es el triángulo ABO con $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ y $O = (0, 0)$.

    (b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}\,ds$, donde C es el segmento que une $O = (0, 0)$ con $A = (1, 2)$.

11. Considera la siguiente integral doble:

$$I \ = \ \int_{-1}^{2} \left\{ \int_{x-2}^{4-x^2} f(x, y)\,dy \right\} dx$$

donde $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en el dominio D de integración.

   (a) i. Describe analíticamente y representa geométricamente el dominio D.

   ii. Cambia el orden de integración en I.

   (b) Sea Γ la frontera de D, orientada en el sentido directo.

   i. Propón una parametrización (seccionalmente regular) para Γ.

   ii. Sea $\vec{F}(x, y) = x\vec{\imath} - y\vec{\jmath}$. Calcula

$$\oint_\Gamma \vec{F} \bullet d\vec{r}.$$

12. Determina una curva C que una el punto $(-1,1)$ al punto $(1,1)$ y tal que

$$\int_C x\,y^2\,dx + y\,dy = 0.$$

13. Calcula el trabajo realizado por el campo vectorial definido en $\mathbb{R}^3$ por

$$\vec{F}(x,y,z) = (2x-z)\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$$

cuando mueve su punto de aplicación sobre la curva seccionalmente regular que resulta de yuxtaponer el segmento de recta con extremos $(0,0,0)$ y $(1,0,0)$ con la curva parametrizada por

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq \pi, \\ z = t/\pi. \end{cases}$$

14. Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x,y,z) = (x+yz, y+xz, z+xy)$ en el desplazamiento de una partícula desde la posición $(0,0,0)$ hasta la posición $(1,1,1)$ a lo largo de la curva asociada a la parametrización $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

15. Sea Γ el segmento de que une los puntos $(0,0,0)$ y $(1,3,5)$.

    (a) Propón una parametrización para Γ.

    (b) Calcula el trabajo realizado por el campo vectorial definido en $\mathbb{R}^3$ por

    $$\vec{F}(x,y,z) = e^{y-z}\vec{i} + e^{z-x}\vec{j} + e^{x-y}\vec{k}$$

    al desplazar una partícula material a lo largo de la curva Γ, desde $(0,0,0)$ hasta $(1,3,5)$.