En una marca rodeando (coordenadas heliocentricos) el RC3BP tiene Hamiltoniana :

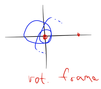
$$H = \frac{|P|^2}{2} - P\cdot iQ - \frac{1-\mu}{|Q|} - \frac{\mu}{|Q-1|}$$

$\mu = 0$

$$H = \underbrace{\frac{|P|^2}{2} - \frac{1}{|Q|}}_{-\frac{1}{2L^2}} - \underbrace{P\cdot iQ}_{G}$$

+ cuando $\mu = 0$, el problema es integrable (problema de Kepler en una marca girando) +

not rot. ($\mu = 0$)



rot. frame ($\mu = 0$)

órbitas quasi − periódicas

(una teorema de KAM)

KOLMOGOROV, ARNOLD, MOSER

(H analytic)

Sea

$$H_\varepsilon = H_0(I) + \varepsilon H_1(I,\theta) + \dots$$

una perturbación de una sistema integrable. Si

(i) El Hessiano $\partial_I^2 H_0$ es invertible

(ii) una frecuencia, $\omega_\varepsilon = \partial_I H_0(I_\varepsilon)$, es Diofantino,

entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ para que H_ε tiene un toro invariante cuando $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$.

Digamos $\omega \in \mathbb{R}^n$ es Diofantino cuando existe constantes $\gamma > 0$, $\tau > 0$ para que

$$|k\cdot\omega| \ge \frac{\gamma}{|k|^\tau} \quad \text{cada } k \in \mathbb{Z}^n\setminus 0$$

Dio $\Rightarrow$ non-res ($\omega\cdot k \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$)

Más precisa, existe coordenadas simplécticas $dI \wedge d\phi$ para que

$$H_\varepsilon = \omega_\varepsilon \cdot I + O(I^2, \phi)$$

cuando $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$.

$$\left(\begin{array}{l} \partial|_{I=0} = 0 \\ \phi|_{I=0} = \omega_\varepsilon \end{array} \right)$$

$\varepsilon = 0$ $\qquad$ $\varepsilon > 0$

Formas normales

Para entender las hipótesis en teoremas de KAM. Intentamos a anular la dependencia por θ, poder por poder.

Recuerda que el flujo del gradientes simplecticas preserva la forma simplectica.

Entonces, se generan cambios de coordenadas simplecticas.

$$(\phi_t^* \omega = \omega \quad \text{for } \phi_t \ (\text{flow of } X_f))$$

Consideramos una función, χ, a ser determinado para que :

$$H_\varepsilon \circ \Phi^t = H_0(I) + \varepsilon \widehat{H}_1(I) + O(\varepsilon^2)$$

donde Φ^t es el flujo de X_χ (el gradiente simplectica de χ).

$$H_\varepsilon \circ \Phi^t = H_0 + \varepsilon H_1 + O(\varepsilon^2) + t\{H_0, \chi\} + O(t^2)$$

$$\overset{t=\varepsilon}{=} H_0 + \varepsilon\underbrace{\left(H_1 + \{H_0, \chi\}\right)}_{\widehat{H}_1} + O(\varepsilon^2)$$

$$\partial_\theta H_0 \cancel{\partial_I} \chi - \partial_I H_0 \cdot \partial_\theta \chi$$

Queremos que χ satisface :

$$H_1(I,\theta) + \{H_0, \chi\} = \widehat{H}_1(I)$$

es decir :

$$H_1 - \omega\cdot\partial_\theta \chi = \widehat{H}_1(I)$$

donde $\omega(I) := \partial_I H_0$.

En serie de Fourier, escribimos :

$$H_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k(I)\, e^{ik\cdot\theta} \quad \text{y} \quad \chi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} b_k(I)\, e^{ik\cdot\theta}$$

$$\partial_\theta \chi = \{ b_k i k\, e^{ik\cdot\theta}$$

Queremos satisfacer :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (a_k - i(\omega\cdot k)\, b_k)\, e^{ik\cdot\theta} = \widehat{H}_1(I)$$

entonces, por I_ε, desde ω_ε no es resonante definimos χ por su expansión de Fourier :

$$b_k := \frac{a_k}{i(\omega_\varepsilon\cdot k)}$$

Un variante más general

Consideramos unas sistemas Hamiltonianas que depende por parametros, $s \in U$, de la forma :

$$H_s^\varepsilon = c_s^\varepsilon + \omega_s^\varepsilon \cdot I + O(I^2, \theta)$$

Para cada $\gamma, \tau > 0$, existe un $\varepsilon > 0$ para que :

Si $\left| H_s - H_s^\varepsilon \right| < \varepsilon$, entonces

(i) existe una mapa $U \to \mathbb{R}^n$, $s \mapsto \omega_s$ con $|\omega_s - \omega_s^\varepsilon| < \varepsilon$

(ii) cuando ω_s es Diofantina existe una mapa simplectica, ϕ_s, para que

$$H_s \circ \phi_s = c_s + \omega_s \cdot I + O(I^2, \theta)$$

(Fo jsz D Hermann)

$\sim$ LKM

para garantizar que condición (ii) no es vacía, hay varias condiciones de no − degeneración. Por ejemplo :

+ que $s \mapsto \omega_s^\varepsilon$ es invertible (la de Kolmogorov)

+ que $s \mapsto \omega_s^\varepsilon$ es sexga (la de Pyartli)

ω $\qquad$ ω not invertible $\qquad$ ω not surjective

Para RC3BP

$$\frac{|P|^2}{2} - \frac{1}{|Q|} = -\frac{1}{2L^2}$$

En coordenadas de Delaunay,

$$H = -\frac{1}{2L^2} - G + O(\mu)$$

$(\mu = 0)$

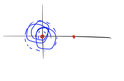
$\dot{\ell} = \frac{1}{L^3}$

$\dot{g} = -1$

Tomamos L, G como parametros en la frecuencia :

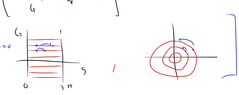
$$\omega^\varepsilon = \left(\frac{1}{L^3}, -1\right)$$

este mapa es sexga. Entonces existe toros Diofantinos que son preservados para $0 < \mu \ll 1$.



Si fijamos le energía total, H, por función implicita, tenemos $L(H, G, \ell', g, \mu)$.

Para órbitas con tal energía H fijada, solo tenemos que traquear los variables G, g, ℓ' en tiempo.



Debido a que ℓ' esta siempre creciendo en tiempo, podemos dibujar las secciones de los toros invariantes en este cilindro G, g.

$\mu > 0$:

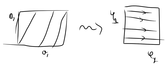
¿Res. tor.?

órbitas periodicas

Consideramos el 'problema general de dinámica' con dos grados de libertad, y enfocamos por un toro resonante :

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I,\theta) + \dots \quad \text{donde } (I,\theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2.$$

Suponemos que $\omega_\varepsilon = \partial_I H_0(I_\varepsilon)$ es resonante $\{k\cdot\omega_\varepsilon = 0$ algún $k \in \mathbb{Z}^2\setminus 0\}$.



$$\begin{pmatrix} A\theta = \varphi \\ I = A^T J \end{pmatrix}$$

Por expansión de Taylor de H_0 alrededor I_ε, tenemos

$$H = \text{cst.} + \omega_\varepsilon\cdot(I - I_\varepsilon) + \varepsilon H_1 + O\left(|I - I_\varepsilon|^2\right) + O(\varepsilon^2)$$

Consideramos nuevos coordenadas que enderezar el flujo por este toro resonante :

$$\phi_1 = k_1\theta_1 + k_2\theta_2$$
$$\phi_2 = j_1\theta_1 + j_2\theta_2$$

donde $k = (k_1, k_2)$ satisface $k\cdot\omega_\varepsilon = 0$ y

$j = (j_1, j_2)$ satisface $k_1 j_2 - k_2 j_1 = 1$ (la transformación tiene determinante 1, lo que significa $\phi \in \mathbb{T}^2$).

$(\varepsilon = 0)$

$$\Phi|_{I=0} = (0, \varphi)$$

$\dot{\varphi} = 0$

La extensión de este transformación a un aplicación simplectica es dado por :

$$k_1 I_1 + j_1 I_2 = I_1 - I_1^\varepsilon$$
$$k_2 I_1 + j_2 I_2 = I_2 - I_2^\varepsilon$$

En estas coordenadas, tenemos :

$$H = \text{cst.} + (\omega_\varepsilon\cdot j) I_2 + \varepsilon H_1(I, \phi) + O(I^2) + O(\varepsilon^2)$$

ponemos

$a = \omega_\varepsilon\cdot j$ $(\neq 0)$

a_1 para el coeficiente de I_1^2 en la expansión de H_ε

Por teorema de función implicita, tenemos $I_2(H, I_1, \phi, \varepsilon)$.

Fijando la energía total, H, sufice traquear las variables I_1, ϕ en tiempo.

+ debido a $\dot{\phi}_2 \neq 0$ para ε y I cerca de cero, usamos ϕ_2 para hacer un sección del flujo, es decir reparametrizamos las trayectorias por ϕ_2

La aplicación de retorno de Poincaré, cuando ϕ_2 crece de 0 a 2π, tiene expresión integral :

$$\phi_1 \mapsto \phi_1 + \int_0^{2\pi} a_1 I_1 + a_2 I_2 + O(\varepsilon) + O(I^2)\, d\phi_2$$

$$I_1 \mapsto I_1 - \varepsilon \int_0^{2\pi} \partial_\phi H_1 + O(I)\, d\phi_1$$

+ buscamos puntos fijados de este aplicación.

Si $a_1 \neq 0$ y la función

$$\int_0^{2\pi} H_1\, d\phi_2 \quad \text{tiene un punto critico (como función de } \phi_1) \text{ no − degenerado}$$

entonces − por teorema de función implicita − sigue siendo puntos fijados de la aplicación de Poincaré cuando $\varepsilon > 0$.

+ este función, $\phi_1 \mapsto \int_0^{2\pi} H_1(I, \phi_1, \phi_2)\, d\phi_2$ de $S^1 \to \mathbb{R}$ siempre tiene al menos dos puntos criticos (max y min) +

órbitas periodicas en RC3BP

El proceso arriba simplifica considerablemente en tomando ventaje de una simetría discreta de RC3BP.

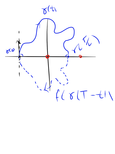
$$f : (Q, P) \mapsto (\bar{Q}, -\bar{P})$$

Tenemos :

$$H \circ f = H$$

$f^*\omega = -\omega$ (f reversa tiempo, es decir envia X_H a $-X_H$)

$$\tilde{\gamma}(t) := \begin{cases} \gamma(t) & t \in (0, T_1) \\ f(\gamma(T-t)) & t \in (T_1, T) \end{cases}$$



Entonces, si $\gamma(t)$ es una solución al RC3BP también es $f(\gamma(-t))$.

+ en particular, si encontramos una solución $\gamma(t)$ con

$$\gamma(0), \gamma\left(\frac{T}{2}\right) \in fix(f)$$

entonces se conduce a una órbita periodica.

+ en coordenadas de Delaunay, los puntos de $fix(f)$ son los con :

(L, G) arbitraria

$(\ell', g) \equiv 0 \mod \pi$

Consideramos una órbita periodica cuando $\mu = 0$:

$$(L, G) = (L_\varepsilon, G_\varepsilon) = \text{cst.}$$

$$(\ell', g) = \left(\frac{1}{L_\varepsilon^3}, -1\right)$$

es periodica cuando

$$\frac{1}{L_\varepsilon^3} = \frac{m}{n} \quad \text{es racional.}$$

+ el periodo es $T = 2\pi n$ +

La condición inicial esta en $fix(f)$. $(\ell' = g = 0)$,

y por tiempo $\frac{T}{2}$, también estamos en $fix(f)$ $(\ell' = n\pi,\ g = -n\pi)$.

Manteniendo G_ε fijado, tenemos una aplicación P que envie

(L, ℓ, μ)

al punto despues tiempo t de la trayectoria con condicion inicial $(L, G_\varepsilon, 0, 0)$ de H_μ.

Sabemos $L = L_{\varepsilon,\mu}$, $\mu = 0$ aterriza por $fix(f)$.

Si el diferencial de

$P(L, \ell, 0)$

por $L_{\varepsilon,\mu}$ $\frac{T}{2}$ es invertible, entonces IFT implica que existe soluciones de

$P(L_{\varepsilon,\mu}, \frac{T_\varepsilon}{2}, \mu) \in fix(f)$

para $0 \le \mu \ll 1$.

Calculamos que

$$dP(L_\varepsilon, \frac{T}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{3T}{2L_\varepsilon^4} & \frac{1}{L_\varepsilon^3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que es invertible!

Created with Grow.com