Tarea 2

Prepara 5 de los siguientes ejercicios para entregar.

1. (a) Considera movimientos planares bajo la ley de Hooke: $\ddot{q} = -q$, con $q \in \mathbb{C}$ y pon $v := \dot{q} \in \mathbb{C}$.

   Deja que $u_1 := q + iv, u_2 := \overline{q} + i\overline{v}$. Mostrar que la proporción $u_1/u_2 \in \mathbb{C}$ (cuando $u_2 \neq 0$) queda costante sobre órbitas.

   (b) Una linea compleja en $\mathbb{C}^2$ es un subespacio de la forma: $\{\lambda(u_1, u_2) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ con $(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \backslash (0, 0)$. Decimos que la linea compleja es generada por (u_1, u_2). La linea proyectiva compleja, $\mathbb{CP}^1$, es el conjunto de lineas complejas en $\mathbb{C}^2$. Para $(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \backslash (0, 0)$ escribimos $(u_1 : u_2) \in \mathbb{CP}^2$ para la linea compleja generada por (u_1, u_2).

   Dado $l \in \mathbb{CP}^1$, mostrar que el conjunto de $(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2$ con $|u_1|^2 + |u_2|^2 = 1$ y $(u_1 : u_2) = l$ es un círculo.

   (c) El mapa $h : \mathbb{C}^2 \backslash (0, 0) \to \mathbb{CP}^1, (u_1, u_2) \mapsto (u_1 : u_2)$ es llamado el mapa de Hopf.[1]

   Definimos dos mapas, $a : \mathbb{CP}^1 \backslash 1pt. \to \mathbb{C}, (u_1 : u_2) \mapsto u_1/u_2$ y $s : \mathbb{C} \to S^2 \backslash 1pt., z \mapsto (\frac{2z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1})$ la proyección estereográfica.

   Verificar que la composición de estos mapas, $s \circ a$, se extiende a un mapa $f : \mathbb{CP}^1 \to S^2$.

   Da una fórmula explícita para el mapa $H = f \circ h : \mathbb{C}^2 \to S^2$.

2. Considera movimientos planares bajo una fuerza central: $\ddot{q} = -\frac{q}{|q|^{\alpha+2}}$, $q \in \mathbb{C}$ donde $\alpha > 0$. ¿Para cuáles valores de la energía sería posible tener movimientos acotados?

3. Considera el cono $\mathcal{C} := \{z^2 = x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3$. Dado un plano $\pi = \{ax + by + cz = d\}$, la curva de intersección $\pi \cap \mathcal{C}$ es llamada una cónica en π. Llamamos a una cónica cerrada una elipse.

   (a) Mostrar que existen dos puntos $f_1, f_2 \in \pi$, llamados los focos de la elipse, t.q. la elipse sea el conjunto de puntos $p \in \pi$ que satisfacen $dist(p, f_1) + dist(p, f_2) = cst.$ (sugerencia: usa o busca el método de esferas de Dandelin).

   (b) Deja que f_1 sea un origen para un sistema de coordenadas Cartesianas (X, Y) para el plano π. Mostrar que la ecuación de la elipse en estas coordenadas tiene la forma: $R = aX + bY + c$, donde $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

   (c) También llamamos al conjunto de puntos definidos por un ecuación de la forma $R = aX + bY + c$ una cónica (con foco en el origen). Deja que f sea un punto fijado y ℓ una linea fijada en el plano. Mostrar que el conjunto de puntos en el plano con $dist(p, f)/dist(p, \ell) = cst.$ es una cónica con foco en f.

   (d) Mostrar que la proyección ortogonal a el plano xy de una elipse $\mathcal{C} \cap \pi$ es una elipse en el plano xy con foco en el origen.

4. Considera un órbita, $q(t)$, del problema de Kepler, $\ddot{q} = -q/|q|^3$, contenido en el plano xy, el cual es $\{z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ y deja que $\mathcal{C} := \{z^2 = x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

   Deja que $Q(t)$ sea el levantamiento ortogonal (ver figuras) de $q(t)$ a $\mathcal{C}$. Mostrar que existe una constante k t.q. $X(t) := Q(t) - (0, 0, k)$ satisface:
   $$\ddot{X} = -X/|q|^3.$$

   Deducir que $X(t)$ queda en algún plano fijo, y que por lo tanto $Q(t)$ se mueve a lo largo de la interseción de $\mathcal{C}$ con algún plano. (con problema 3(d), has demostrado la primera ley de Kepler).

[1] Comentario: si restriges h a $S^3 = \{|u_1|^2 + |u_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$, y haces una proyección estereográfica: $S^3 \backslash 1pt.$ a $\mathbb{R}^3$, es posible hacer dibujos de varios niveles de h en $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, las pre-imagenes por H de latitudes de S^2 son tori en $\mathbb{R}^3$, mientras que las pre-imagenes de puntos en esta latitud son círculos contenidos en este toro, todos los cuales estan vinculados. Si uno tiene talento con gráficos de computadora, es posible hacer unos dibujos bonitos (o simplamente busqua en internet la 'fibración de Hopf').

5. [1] (a) Considera una curva $c(s)$ contenida en la esfera unitaria, S^2, es decir que $|c(s)| = 1$ para todo s. Suponer que la curva sea parametrizada por longitud, es decir que se mueva con velocidad unitaria: $|c'(s)| = 1$. Pon $n(s) := c(s) \times c'(s)$. Mostrar que

$$c''(s) = -c(s) + k(s)n(s),$$

donde $k(s) \in \mathbb{R}$. Llamamos a k la *curvatura geodesica con signo* de la curva (porque $|k| = \kappa_{esf}$), ver las figuras para una interpretación geometrica de k.

(b) Cuando observamos un objeto astronómico de la tierra –por ejemplo un cometa– podemos medir la línea de visión de nosotros hacia el objeto. En las notaciones de la figura, podemos medir $c := \frac{\vec{C}}{C} \in S^2$ donde $C := |\vec{C}|$.

Considera la parametrización por longitud, $c(s)$, de la curva c, y pon $v := |\dot{c}(t)| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$. Mostrar que

$$\ddot{\vec{C}} \cdot n = Ckv^2,$$

donde $n = c \times c' = c \times \frac{dc}{ds}$.

(c) Deja que $\vec{r} = \vec{ES}$ sea el vector de posición de la tierra desde el sol y $\vec{R}$ el vector de posición del objeto desde el sol, para que: $\vec{r} + \vec{C} = \vec{R}$. Assumiendo que $\vec{r}, \vec{R}$ son soluciones a la ecuación de Kepler: $\ddot{\vec{r}} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$, $\ddot{\vec{R}} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$ mostrar que:

$$\ddot{\vec{C}} \cdot n = \vec{r} \cdot n\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right).$$

6. (a) Considera una distribución continua de masa sobre la superficie de una esfera con densidad constante. Mostrar que un punto adentro de la esfera no tiene ninguna fuerza debido a la esfera actuando sobre el.

(b) Considera una distribución continua de masa sobre una bola sólida con densidad constante. Mostrar que un punto adentro de la bola está sometido a una fuerza proporcional a su distancia del centro de la bola y dirigida hacia el centro de la bola. [2]

7. Considera el movimiento libre de una partícula restringida a una superficie de revolución (ver figuras). Mostrar que el componente del momento angular a lo largo del eje de revolución es constante sobre el movimiento. ¿Todavía es una costante de movimiento cuando hay una fuerza gravitacional paralela al eje?

8. [3] Considera el 'péndulo de Hyugens': pegamos una cuerda a la 'cusp' de una curva cicloide tal que un peso en el otro extremo de la cuerda se mueva a lo largo de la evolvente de la cicloide. Deja que s sea la longitud sobre este evolvente con $s = 0$ en el punto mas bajo. Mostrar que $\ddot{s} = -ks$ para algúna constante k.

9. Considera el sistema: $\ddot{x} = U'(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Supón que este sistema admite órbitas periódicas (es decir soluciones que trazan curvas cerradas en el plano $(x, \dot{x})$) para algún intervalo de valores de la energía.

Deja que $A(E)$ sea el area en el plano $(x, \dot{x})$ encerrada por tal órbita periódica de energía E y deja que $T(E)$ sea el periodo de esta órbita. Mostrar que $\frac{dA}{dE} = T$.

---

[1] comentario: si pones igual las resultas de partes (b) y (c) de este problema y interpretalos geometricamente, uno obtiene la 'teorema de Lambert sobre senderos aparentes' (ver figuras). La egalidad de partes (b) y (c) también da un método para determinar órbitas de objetos: asumiendo que sabemos $\vec{r}(t)$, (b) y (c) combinen a dar una relación $f(R, C) = 0$. Usando la relación adicional $g(R, C) = 0$ desde $R^2 = r^2 + 2\vec{r} \cdot \vec{C} + C^2$, uno puede determinar $C(t)$ que junto con $c(t)$ determina la órbita, $\vec{R}(t)$ del objeto (sin embargo, hay otros metodos mas eficientes para determinar órbitas debido a Laplace y Gauss).

[2] En particular, si hubiera un túnel a través la bola, un objeto soltado en este túnel oscilaría de un lado a otra como el movimiento de los resortes.

[3] Este problema muestra que el péndulo de Hyugens tiene un periodo de oscilación independiente de las condiciones inciales –es un buen péndulo para relojes. También, esta curva evolvente –que es otra cicloide de la tarea 1– es una curva 'tautochrone': si sueltas el peso desde cualquier posición en la curva este llegara al fondo en el mismo intervalo de tiempo.

10. Considera dos masas puntuales, m, M, situadas en una línea con distancias x, y a una pared de refleción (ver figura). Pon $u = \dot{x}, v = \dot{y}$. Suponemos que las colisiones entre las masas son prefectamente elásticas:

cuando hay colisión con la pared, $x = 0$, reemplazamos $u \to -u$,

cuando hay colisión entre las masas, $x = y$, reemplazamos $u \to \tilde{u}, v \to \tilde{v}$ t.q. preservemos el momento lineal $mu + Mv = m\tilde{u} + M\tilde{v}$ y la energía cinética: $mu^2 + Mv^2 = m\tilde{u}^2 + M\tilde{v}^2$.

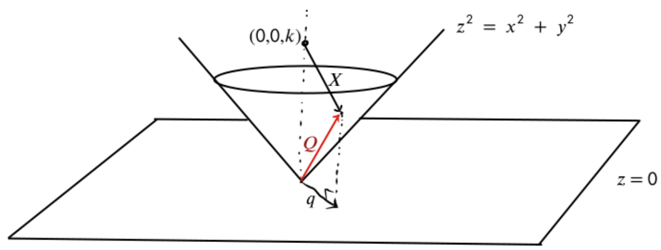
(a) Pon $X := \sqrt{m}x, Y := \sqrt{M}y$ y $U := \dot{X}, V := \dot{Y}$. Mostrar que, para preservar su orden en la línea, las posiciones X, Y deben estar en el sector: $Y \geq \sqrt{\frac{M}{m}}X \geq 0$ del plano (X, Y). Aquí $X = 0$ representa una colisión con la pared y $Y = \sqrt{\frac{M}{m}}X$ representa una colisión de las masas.

(b) Pon $\vec{v} := (U, V)$. Mostrar que cuando chocamos con la pared, reemplazamos $\vec{v}$ con su reflexión sobre la linea $X = 0$. Mostrar que cuando las masas chocan la una con la otra, reemplazamos $\vec{v}$ son su reflexión sobre la línea $Y = \sqrt{\frac{M}{m}}X$.

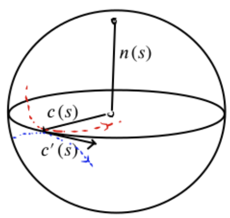
(c) [1] Entre colisiones, el movimiento de las masas es lineal: $(X, Y) + t\vec{v}$. En lugar de reflegar la velocidad sobre la frontera del sector, puedes reflegar el sector sobre la frontera (ver figura) y dejar que el movimiento continúe linealmente. Si la velocidad inicial es $\vec{v} = (0, V)$, contar el número de colisiones en términos de $\alpha = \arctan\sqrt{\frac{m}{M}}$.

[1] En el caso especial: $M = 10^{2N}m$, una tendrá $\tan\alpha = 10^{-N}$, que es pequeño cuando $N > 0$. Reemplazar $\tan\alpha \approx \alpha$, causará que el número de choques en este caso sea: $\lfloor 10^N\pi \rfloor$ =los primeros N digitos de π. El reemplazamiento de $\tan\alpha$ con α se puede justificar (ver el artículo de Galperin).

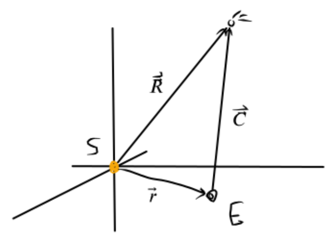
#4



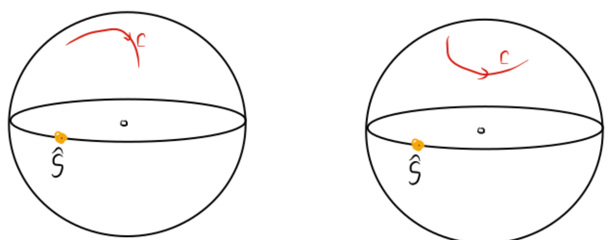
#5



cuando $k(s) > 0$ (rojo) la curva se dobla curve hacia $n(s)$
cuando $k(s) < 0$ (azul) la curva se dobla fuera de $n(s)$



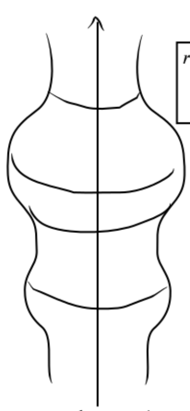
en observando un ojeto astronomica,
podemos medir el vector unitario a lo largo de $\vec{C}$



$r > R$ $\quad$ $r < R$

Teorema de Lambert sobre el sendero apparente de un ojeto. En la 'esfera de lineas de vision desde la tierra' :
$*$ cuando el sendero del ojeto se dobla hacia el sol, el ojeto es mas cerca al sol que la tierra ,
$*$ cuando el sendero del ojeto se dobla fuera del sol, el ojeto es mas lejos al sol que la tierra.

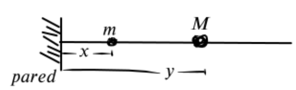
#7

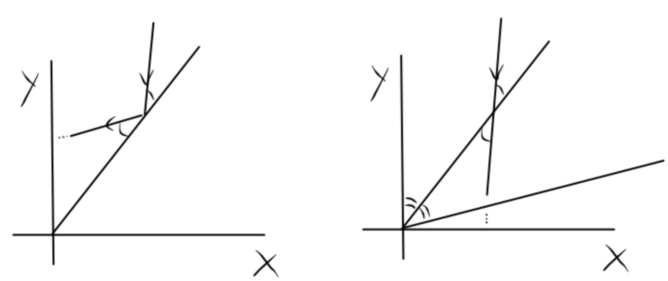


eje de rotación

rodeando una curva en espacio alrededor un eje genera un superficie de revolución.

#10





lado izquierda, reflejamos la velocidad sobre la frontera
lado derecha, reflejamos el sector sobre la frontera