

TAREA 4
preparar 5 (o más) de los siguientes ejercicios para entregar

1. Considera $\mathbb{R}^3$ con producto de dot $\cdot$ standard y coordenadas Cartesianas $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$. Para $v \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, $x \mapsto v(x) = v^j(x) \partial_{x^j}$, definimos las formas diferenciales:

$$\omega_v^1 \in \Omega^1(\mathbb{R}^3), \quad (\omega_v^1)_x(u) := v(x) \cdot u, \quad \omega_v^2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3), \quad (\omega_v^2)_x(u, w) := v(x) \cdot (u \times w)$$

donde $u, w \in T_x \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$. Notar que $\omega_v^2 = i_v \omega_{vol}$, con $\omega_{vol} := dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.¹

- (a) Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ un aplicación diferenciable. Verificar que:

$$\omega_v^1 = v_1 dx^1 + v_2 dx^2 + v_3 dx^3, \quad \omega_v^2 = v_1 dx^2 \wedge dx^3 + v_2 dx^3 \wedge dx^1 + v_3 dx^1 \wedge dx^2$$

$$df = \omega_{\nabla f}^1, \quad d\omega_v^1 = \omega_{\nabla \times v}^2, \quad d\omega_v^2 = (\nabla \cdot v) \omega_{vol}, \quad d\omega_{\nabla f}^2 = (\Delta f) \omega_{vol}.$$

- (b) Evaluar las integrales:

$$\int_{L_\alpha} \omega_n^2, \quad \int_{\Sigma} x^1 dx^2 \wedge dx^3 + x^2 dx^3 \wedge dx^1, \quad \int_{S_+^2} x^1 dx^2 \wedge dx^3 - x^2 dx^3 \wedge dx^1$$

con: $L_\alpha \subset S_R^2$ una luna esferical con angulo α en la esfera de radio R y n el normal unitario exterior a S_R^2 ; $\Sigma = \partial\{(x^1)^2 + (x^2)^2 \leq 1, 0 \leq x^3 \leq 1\}$; y S_+^2 es la hemisfera arriba ($x^3 \geq 0$) de la esfera unitario.

- (c) Establr las ‘identidades de Green’:

$$\omega_v^1 \wedge \omega_u^2 = (u \cdot v) \omega_{vol}, \quad \nabla \cdot (fv) = \nabla f \cdot v + f \nabla \cdot v$$

$$\int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) \omega_{vol} = \int_{\partial \Omega} \omega_{f \nabla g - g \nabla f}^2$$

$$\iint_D (\nabla \cdot V) dA = \int_{\partial D} \partial_n V ds$$

donde $u, v \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ y $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$; ² $D \subset \mathbb{R}^2$ es un region acotada con normal unitario, n , exterior a su frontera ∂D y $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$; en la última ecuación ds es elemento de longitud de arco sobre ∂D y dA elemento de area en el plano.

2. Sea T un triangulo geodesica en una esfera de radio R (lados arcos de gran círculos), con angulos interiores α, β, γ . Demostrar que $R^{-2} \text{Area}(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

* se puede usar aqui la resulta sobre el area de una luna esferical de problema 1(b) *

3. Para el plano hiperbolica $H^2 = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ (con métrica $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$):

(a) Sea $T_\infty \subset H^2$ un triangulo infinito con angulos interiores $0, \pi/2, \alpha$ (ver figuras). Mostrar que $\text{Area}(T_\infty) := \int_{T_\infty} \frac{dx dy}{y^2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

(b) Sea $T \subset H^2$ un triangulo con angulos interiores α, β, γ . Mostrar que $\text{Area}(T) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.

4. Sea $D \subset \Sigma$ un region sencilla con frontera $\partial D = \cup c_j$ una curva cerrado suave a trozos con angulos exteriores α_j . Mostrar que: $\int_D K dA + \sum \left(\int_{c_j} \kappa_{geo} ds + \alpha_j \right) = 2\pi$

¹Comentario: para una curva, $C \subset \mathbb{R}^3$, superficie, $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, orientadas, tenemos: $\int_C \omega_v^1 = \int_C v \cdot d\vec{s}$, $\int_\Sigma \omega_v^2 = \iint_\Sigma v \cdot d\vec{S}$ para integrales de circulación de v alrededor C o flujo de v atrás Σ en una notación mas estandard. Para un region, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, y densidad $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, la masa de Ω respecto a ρ es $\int_\Omega \rho \omega_{vol} = \iiint_\Omega \rho dV$.

²La integral $\int_{\partial \Omega} \omega_{f \nabla g - g \nabla f}^2$ en notaciones mas estandard se escribe como: $\iint_{\partial \Omega} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial \Omega} (f \partial_n g - g \partial_n f) dS$ con n normal unitario exterior a $\partial \Omega$, dS elemento de area de $\partial \Omega$ y $\partial_n f := \nabla f \cdot n$. Tambien se usa la notación $\partial_n v := v \cdot n$.

5. (a) Sea $c : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular parametrizado por longitud del arco con marca de Frenet-Serret $T = c', N = JT$. Calcular que el area del tubo alrededor c de radio $r : T_r(c) := \{c(s) + tN(s) : s \in [0, \ell], t \in [-r, r]\}$ esta dado por $2r\ell$ (en particular no depende de como c esta encajada en el plano).
- (b) Sea $c : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizado por longitud del arco con marca de Frenet-Serret $T = c', N, B = T \times N$. Calcular que el volumen del tubo alrededor c de radio $r : T_r(c) := \{c(s) + t \cos \theta N(s) + t \sin \theta B(s) : s \in [0, \ell], t \in [-r, r], \theta \in [0, 2\pi]\}$ esta dado por $\pi r^2 \ell$.
- (c) Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada y parametrizado por $(u, v) \mapsto f(u, v)$ con normal unitaria $\nu(u, v)$. Calcular que el volumen del tubo alrededor Σ de radio $r : T_r(\Sigma) := \{f(u, v) + t\nu(u, v) : t \in [-r, r]\}$ esta dado por $2r \text{Area}(\Sigma) + \frac{4\pi r^3}{3} \chi(\Sigma)$, con $\chi(\Sigma)$ el caracteristica de Euler de Σ .
6. (a) Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada con normal unitario $\nu : \Sigma \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Verificar que $\nu^* dA_{S^2} = K dA_\Sigma$, con K la curvatura Gaussiana de Σ .
- (b) Sea $c : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva cerrado sin intersecciones parametrizado por longitud del arco con marca de Frenet-Serret T, N, B . Pon $\Sigma_t := \{c(s) + t \cos \theta N(s) + t \sin \theta B(s) : s \in [0, \ell], \theta \in [0, 2\pi]\}$ la 'superficie paralelo a c de distancia t '. Verificar que – para t suficientemente pequeno – Σ_t es un toro encajada en $\mathbb{R}^3$ con curvatura Gaussiana dado por: $K_t(s, \theta) = -\frac{\kappa(s) \cos \theta}{t(1 - t\kappa(s) \cos \theta)}$.
- (c) Sea $\Sigma_t^+ = \{p \in \Sigma_t : K_t(p) \geq 0\}$, y $\nu_t : \Sigma_t \rightarrow S^2$ un normal unitario a Σ_t . Verificar que $\nu_t|_{\Sigma_t^+}$ esta suryectiva (sugerencia: si un superficie esta contenido en un lado de su plano tangente por un punto, sigue que la curvatura Gaussiana por tal punto no es negativa). Deducir que $\int_c \kappa(s) ds \geq 2\pi$, donde κ es la curvatura de c .¹
7. Para $\alpha \in \Omega^k(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(N, M)$, demostrar las siguientes identidades:
- (a) $df^* \alpha = f^* d\alpha$
- (b) $\mathcal{L}_X \alpha = di_X \alpha + i_X d\alpha$ (considera la formula de homotopía para el flujo de X !)
- (c) para $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ y $\tau(v_0, \dots, \cancel{v_j}, \dots, v_k) := \tau(v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k)$:
- $$d\alpha(X_0, \dots, X_k) = \sum (-1)^j X_j \alpha(X_0, \dots, \cancel{X_j}, \dots, X_k) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \cancel{X_i}, \dots, \cancel{X_j}, \dots, X_k)$$
- * sugerencia para (c): aplica (b) y la formula para la derivada de Lie de un tensor en terminos de $\mathcal{L}_X$ sobre $\mathcal{F}(M)$ y $\mathfrak{X}(M)$. *
8. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $p \in M$ un cero de X . Sea $\pi : TM \rightarrow M$ la proyección canonical y $M_0 \subset TM$ la gráfica del campo vectorial constantemente cero.
- (a) Por $0_p \in T_p M \subset TM$ el cero vector, verificar que tenemos la decomposición $T_{0_p} TM = V_1 \oplus V_2$ donde $V_1 = \ker d_{0_p} \pi$ y $V_2 = T_{0_p} M_0$ son ambos canonicamente isomorfa a $T_p M$.
- (b) Veyendo $X : M \rightarrow TM$, la linearización de X por su cero p es la aplicación $\pi_1 \circ d_p X : T_p M \rightarrow T_p M$ donde $\pi_1 : T_{0_p} TM \rightarrow V_1 = T_p M$ según la decomposicion en (a). Derivar la expresión para tal linearización de X por p en coordenadas locales.
9. (a) Mostrar que $\mathbb{R}^n \setminus \{\text{punto}\}$ no es difeomorfica a $\mathbb{R}^n$.
- (b) Dar un ejemplo de un campo vectorial sobre $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ que nunca es cero (considera la acción $n\text{-veces}$ de elementos en $\overbrace{O(2) \times \dots \times O(2)}^{n\text{-veces}} \subset O(2n)$ sobre S^{2n-1}).
10. Sea V un espacio vectorial real de dimension n y $\beta : V \rightarrow V^*$ un aplicación lineal, invertible y simetrica.
- (a) Pon $C_\beta := \{[v] \in \mathbb{P}V : (\beta v, v) = 0\}$. Mostrar que el plano tangente $T_{[v]} C_\beta$ esta representado por $[\beta v] \in \mathbb{P}V^*$ (es decir $[w] \in \mathbb{P}V$ t.q. $(\beta v, w) = 0$).
- (b) Para $[w] \in \mathbb{P}V$, pon $[w]^\perp := \{[v] \in \mathbb{P}V : (\beta w, v) = 0\}$. Verificar que $[x] \in [w]^\perp \cap C_\beta \Rightarrow [w] \in T_{[x]} C_\beta$.

¹La teorema de Fenchel dice que este desigualdad tiene igualdad exactamente cuando c es una curva planar y convexo.

11. Sea $\mathcal{C} = \{x_0^2 = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2\} \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$. Escribimos vectores como $\tilde{x} = (x_0, x) \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ con $x_0 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $(\cdot, \cdot)$ para el producto Lorentziana (entonces $(\tilde{u}, \tilde{v}) := u \cdot v - u_0 v_0$ y $\mathcal{C} = \{(\tilde{x}, \tilde{x}) = 0\}$).

(a) Para $\tilde{x} \in \mathcal{C}$, mostrar que $T_{\tilde{x}}\mathcal{C} = \tilde{x}^\perp = \{\tilde{u} \text{ t.q. } (\tilde{x}, \tilde{u}) = 0\}$.

(b) Sea $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S^n, \tilde{x} = (x_0, x) \mapsto \frac{x}{x_0} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Mostrar que para $\tilde{u}, \tilde{v} \in T_{\tilde{x}}\mathcal{C}$ tenemos: $(\tilde{u}, \tilde{v}) = x_0^2 (\pi_*\tilde{u}) \cdot (\pi_*\tilde{v})$ donde $\cdot$ es el producto interior estandar sobre $\mathbb{R}^{n+1}$.

(c) Deducir que una transformación de Möbius¹ de la esfera es una aplicación conforme de la esfera.

12. Sea V un espacio vectorial real de dimension 2, y $V^\mathbb{C} := \mathbb{C} \otimes V$ su complexificación.

Para $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interior positivo sobre V , sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su extensión a un producto Hermitiano sobre $V^\mathbb{C}$: en elementos básicos $\langle z \otimes \vec{u}, w \otimes \vec{v} \rangle := z\bar{w} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. Para $\xi \in V^\mathbb{C}$ denota por $\xi^* \in (V^\mathbb{C})^*$ la aplicación $\mathbb{C}$ -lineal: $V^\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \eta \mapsto \langle \eta, \xi \rangle$.

(a) Considera la aplicación $\Phi : V^\mathbb{C} \rightarrow M_2(\mathbb{C}), \xi \mapsto \xi \otimes \xi^* =: \Xi$ (es decir $\Xi(\eta) = \langle \eta, \xi \rangle \xi$). Verificar que Ξ es un operador Hermitiano: $\langle \Xi\eta, \zeta \rangle = \langle \eta, \Xi\zeta \rangle$ para cada $\eta, \zeta \in V^\mathbb{C}$. También verificar que $\det(\Xi) = 0$ y para $A \in GL_2(\mathbb{C})$, tenemos $\Phi(A\xi) = A\Xi A^*$ (donde $\langle A\eta, \zeta \rangle = \langle \eta, A^*\zeta \rangle$ cada $\eta, \zeta \in V^\mathbb{C}$ define A^*).

(b) Denota por $i\mathfrak{u}_2 \subset M_2(\mathbb{C})$ matrices Hermitianas ($B = B^*$), y $\mathcal{C} := \{B \in i\mathfrak{u}_2 \text{ t.q. } \det(B) = 0\}$. Entonces, por (a), $\Phi : V^\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}$. Verificar que Φ induce una aplicación $\bar{\Phi} : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{PC}$, donde $\mathbb{CP}^1 := (V^\mathbb{C} \setminus 0)/\mathbb{C}_{\neq 0}$, $\mathbb{PC} := (\mathcal{C} \setminus 0)/\mathbb{R}_{\neq 0}$.

Observa que $GL_2(\mathbb{C})$ actúa sobre los espacios cocientes: $A[\xi] := [A\xi]$, $A \cdot [\phi(\xi)] := [\phi(A\xi)]$, y en particular A y λA (para $\lambda \in \mathbb{C}_{\neq 0}$) inducen la misma acción. En particular por reescalando los elementos de $GL_2(\mathbb{C})$, tenemos acción de $PSL_2(\mathbb{C}) := \{A \in GL_2(\mathbb{C}) \text{ t.q. } \det(A) = 1\}/(A \sim -A)$ sobre los cocientes $\mathbb{CP}^1, \mathbb{PC}$.

(c) Sea e_1, e_2 una base ortonormal para $V, \langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces $e_j := 1 \otimes e_j \in V^\mathbb{C}$ es una base para $V^\mathbb{C}$. Denota

con $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \leftrightarrow V^\mathbb{C}$ las coordenadas de esta base. Tome coordenadas $i\mathfrak{u}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & t - x_3 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow$

$\{(t, x) := (t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^4\}$ para las matrices Hermíticas.

Notar que, para $B \in i\mathfrak{u}_2$, bajo esta correspondencia: $\det(B) \leftrightarrow t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ es la norma Lorentziana.

En estas coordenadas, para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$, verificar que la transformación $i\mathfrak{u}_2 \ni B \mapsto ABA^* \in i\mathfrak{u}_2$ es un elemento de $SO_{3,1}$ (y desde # 11 corresponde a una transformación conforme de S^2). Tome una proyección estereográfica de S^2 del polo norte al plano ecuatorial, identificado con $\mathbb{C} \ni z$. Verificar que la aplicación conforme de S^2 está dado por $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$.

13. Verificar que bajo proyección estereográfica $S^n \setminus \{\text{punto}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ al plano ecuatorial, tenemos que $n-1$ -esferas en S^n (es decir intersecciones de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con planos afines de $\mathbb{R}^{n+1}$) son enviados a $n-1$ -esferas o hiperplanos en $\mathbb{R}^n$.

14. Sea V un espacio vectorial real de dimension 2, y $V^\mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes V$ su complexificación.

(a) Para $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ anti-simétrica y no degenerada, mostrar existe una base e_1, e_2 de V tal que $\omega = e^1 \wedge e^2$ (con e^j base dual a e_j).

(b) Escribe todavía ω para la extensión de ω a $V^\mathbb{C}$ (en elementos básicos $\omega(z \otimes \vec{u}, w \otimes \vec{v}) := zw\omega(\vec{u}, \vec{v})$). Verificar que $(\cdot, \cdot) : V^\mathbb{C} \times V^\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (\xi, \eta) := \frac{i}{2}\omega(\xi, \bar{\eta})$ es una forma Hermitiana sobre $V^\mathbb{C}$, y que existe una base f_1, f_2 de $V^\mathbb{C}$ tal que $\langle f_1, f_1 \rangle = 1, \langle f_1, f_2 \rangle = 0, \langle f_2, f_2 \rangle = -1$.

(c) Sea $SL_2(\mathbb{C})$ transformaciones lineales de $V^\mathbb{C}$ que preservan ω , $U_{1,1}$ transformaciones lineales que preservan $(\cdot, \cdot)$ y $GL_2(\mathbb{R})$ transformaciones lineales de $V^\mathbb{C}$ inducidas por transformaciones lineales (invertibles) de V . Verificar que la intersección de cualquier dos de los grupos arriba coincide:²

$$SL_2(\mathbb{C}) \cap U_{1,1} = U_{1,1} \cap GL_2(\mathbb{R}) = GL_2(\mathbb{R}) \cap SL_2(\mathbb{C})$$

¹Tal transformación está inducido por $A \in O_{n+1,1}$ enviando $\pi(\tilde{x}) \mapsto \pi(A\tilde{x})$ para $\tilde{x} \in \mathcal{C}$ y donde $O_{n+1,1}$ es el grupo de transformaciones lineales de $\mathbb{R}_1^{n+1}$ que preservan el producto Lorentziana $(\cdot, \cdot)$.

²Esta intersección común se denota por $SL_2(\mathbb{R})$ cuando se expresa los elementos en la base e_1, e_2 de $V^\mathbb{C}$ o por $SU_{1,1}$ en la base f_1, f_2 de $V^\mathbb{C}$.

15. Sea $\mathcal{H}^+ = \{x^2 + y^2 + 1 = z^2, z > 0\}$ el modelo del plano hiperbolico hiperboloide arriba con métrica $(dx^2 + dy^2 - dz^2)|_{\mathcal{H}^+}$.
- (a) Verificar que la métrica en el disco de Poincaré $D = \{(x, y, 0), x^2 + y^2 < 1\}$ tome la forma $\frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ (recordar que proyección estereográfica de $\mathcal{H}^+$ desde el punto $(0, 0, -1)$ al $z = 0$ plano envia $\mathcal{H}^+$ a D).
- (b) Verificar que la métrica en el semi-plano arriba $H = \{(x, y), y > 0\}$ tome la forma $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.
- (c) Verificar que $SU_{1,1}$ actua sobre D por isometrías y $SL_2(\mathbb{R})$ actua sobre H por isometrías como transformaciones de Möbius.
16. do Carmo: pg. 46, # 7

figura para problema 3:

