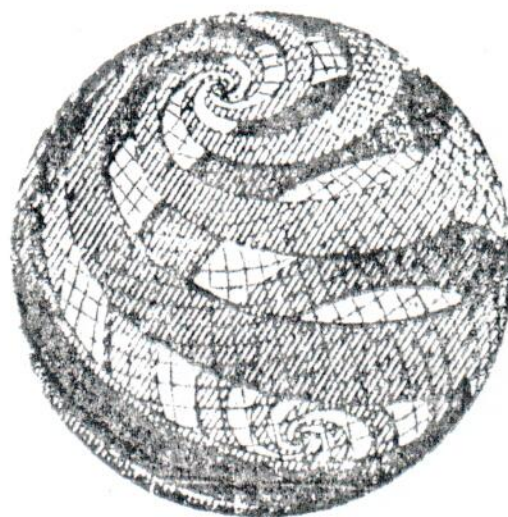


TOPOLOGIA DIFERENCIAL



SAMUEL GITLER H.
ENRIQUE ANTONIANO M.

**1er. Coloquio del Departamento de Matemáticas
del
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del I.P.N.**

**Oaxtepec, Morelos
5 al 25 de Agosto de 1979**

Patrocinadores :

S.E.P.

CoNaCyT

C.I.E.A. del I.P.N.

Estas notas fueron elaboradas para los cursos del 1er. Coloquio del Departamento de Matemáticas del C.I.E.A. del I.P.N. y su edición consta de 500 ejemplares.

Esperamos que con las sugerencias y la ayuda de los participantes a los cursos evolucionen en un texto que sea de utilidad para profesores y estudiantes.



Por el Comité Organizador:

Juan José Rivaud M. (Coordinador)

Indice

1. Transformaciones diferenciables de R^n en R^m	1
La diferencial de una función.....	1
Teorema de la función inversa.....	5
Teorema del Rango.....	11
Teorema de Sard.....	16
2. Variedades.....	17
Sistemas de coordenadas.....	17
El espacio tangente a una variedad.....	18
Ejemplos de variedades.....	20
Funciones diferenciables entre variedades.....	26
Subvariedades.....	28
La diferencial de una función entre variedades.....	30
3. Transversalidad.....	32
Teorema preliminar.....	36
Variedades con frontera.....	40
Homotopía entre funciones.....	42
Teorema de Transversalidad de Thom.....	43
4. Clasificación de Variedades de dimensión uno.....	48
5. Teoría de Intersecciones módulo dos.....	54
Número de intersección módulo dos.....	55
Número de giro de una función.....	58
Teorema de Borsuk -Ulam.....	59
6. Orientación de Variedades.....	63
7. Números de Intersección Orientados.....	67
Número de intersección.....	68
Teorema fundamental del Algebra.....	71
Teoría del punto fijo de Lefschetz.....	72
Campos vectoriales en esferas.....	82

Introducción

Estas notas fueron escritas para servir de base al curso de Topología Diferencial en el Primer Coloquio de Matemáticas del CINVESTAV del 5 al 25 de agosto de 1979.

La Topología Diferencial estudia una clase de espacios topológicos llamados Variedades que introducimos en la sección 2. Lo más sobresaliente de estas Variedades es que se puede dar sentido a la noción de diferenciabilidad de funciones entre ellas, como se hace en el cálculo de varias variables.

En el origen de las variedades está el Teorema de la Función Inversa o su equivalente, el Teorema del Rango que presentamos en la sección 1.

En las secciones 3 y 4 preparamos el terreno para desarrollar la Teoría de Intersecciones. Primero, en la sección 3 definimos la Transversalidad entre dos subvariedades de una variedad y estudiamos el Teorema de Transversalidad de Thom. Luego, en la sección 4 clasificamos las variedades de dimensión uno, lo que plantea la cuestión de la clasificación de variedades de otras dimensiones; cuestión muy lejos de ser entendida fuera de las dimensiones uno y dos.

La teoría de intersecciones realmente combina las ideas de homotopía o de deformación de funciones y la de Transversalidad con construcciones muy particulares y muy al estilo de la topología algebraica, para resolver problemas de diversa índole como los que

presentamos en las secciones 5 y 7.

En la sección 6 resolvemos un problema técnico de gran importancia, para distinguir una clase de Variedades llamadas Orientables. Restringirnos a esta clase de variedades nos permite en la sección 7 refinar las ideas sobre Intersecciones de la sección 5 y obtener nuevos resultados.

Aprovechamos las últimas líneas de la introducción para agradecer a Laura Torres Barrera su trabajo matematicotaquimecanográfico.

Samuel Gitler

Enrique Antoniano

México, D.F., 15 de julio de 19

1. Transformaciones diferenciables de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

La diferencial de una función.

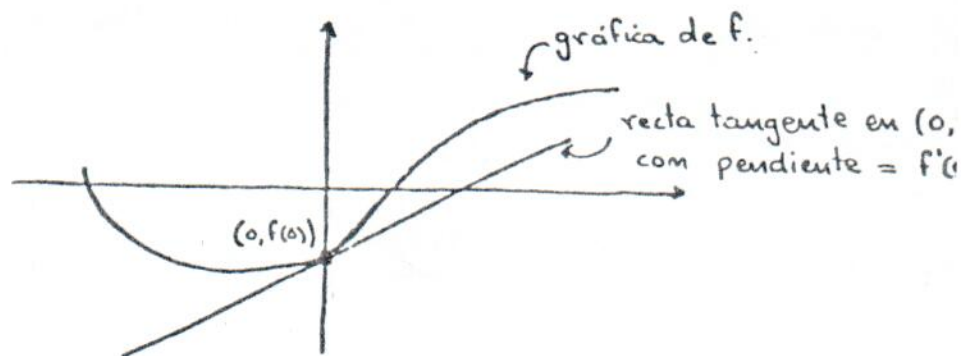
Empecemos por el caso más sencillo, el de la diferencial de una función de una variable, con valores reales

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Que la función f sea derivable en cero significa que existe el límite

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

El número $f'(0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(0, f(0))$.



La recta tangente es la gráfica de una función lineal afín

$$L: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por la fórmula $L(x) = f'(0) \cdot x + f(0)$.

Esta función lineal se llama la diferencial de f en cero y es la transformación lineal afín que mejor aproxima a la función f cerca del cero.

Más precisamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - L(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f'(0) \cdot x}{x} = 0$$

La diferencia entre la función $f(x)$ y su diferencial $L(x)$ es "mucho más pequeña" que el valor de la variable x en una vecindad del cero. De hecho para cualquier constante positiva ϵ , por pequeña que esta sea, se satisface la desigualdad

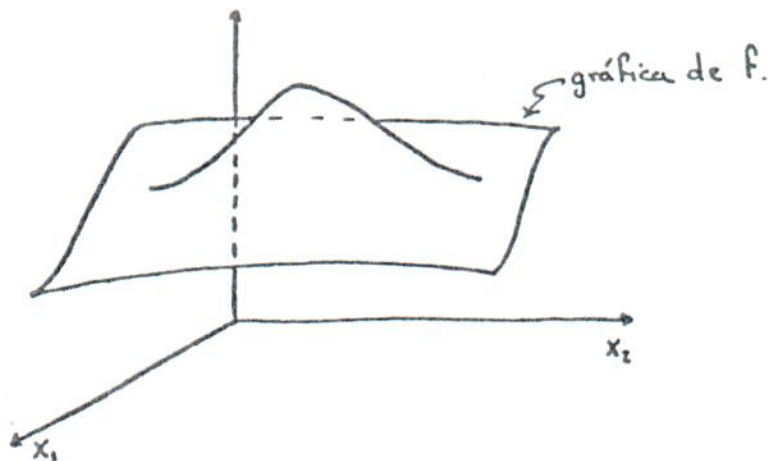
$$|f(x) - L(x)| < \epsilon |x|$$

para toda x en alguna vecindad del cero.

Veamos ahora que sucede con una función de dos variables:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Su gráfica es una superficie en $\mathbb{R}^3$:



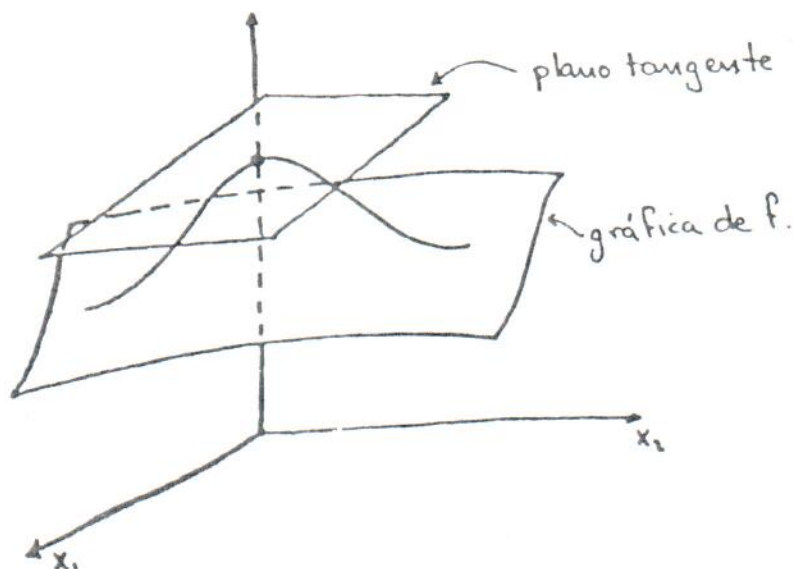
Diremos que f es diferenciable en el origen $(0,0)$, si existe una transformación lineal afín

$$L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$L(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + f(0,0) = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f(0,0), \quad \text{tal que}$$

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_1, x_2) - L(x_1, x_2)}{|(x_1, x_2)|} = 0$$

En este caso, L se llama la diferencial de f en $(0,0)$. La gráfica de L es el plano Tangente a la superficie $z = f(x_1, x_2)$, que es la gráfica de f .



Tomando el límite anterior por el eje x_1 , esto es, haciendo tender (x_1, x_2) a $(0,0)$ por puntos de la forma $(x_1, 0)$, tenemos

$$0 = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, 0) - L(x_1, 0)}{x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, 0) - f(0, 0)}{x_1} - a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) - a_1$$

así, $a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0)$; análogamente $a_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0)$ y por lo tanto

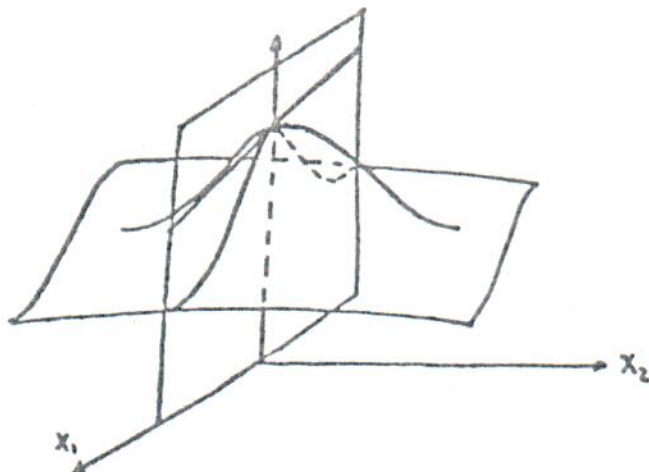
L tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f(0, 0) \\ &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) + f(0, 0). \end{aligned}$$

El número $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0)$ es la pendiente de la recta tangente a la

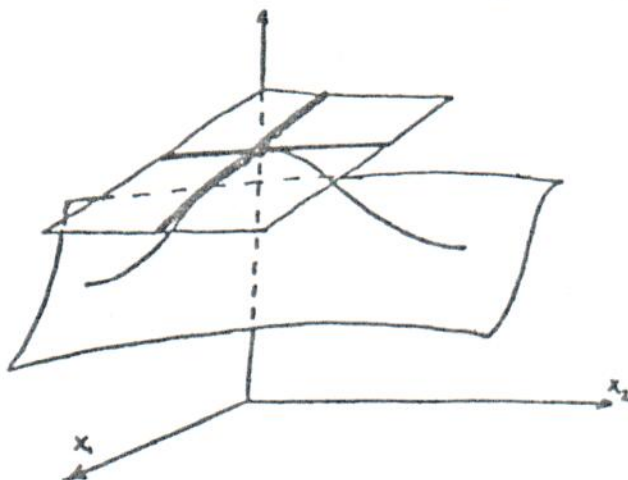
la curva que se obtiene al intersectar la superficie $z = f(x_1, x_2)$

con el plano $x_1 - z$, como se ve en la figura:



Análogamente, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva que se obtiene al intersectar la superficie $z = f(x_1, x_2)$ con el plano $x_2 - z$.

Estas dos rectas determinan el plano tangente a la superficie



El significado geométrico de diferenciabilidad de una función es que su gráfica, que es una superficie, tenga un plano tangente en cada punto. Ahora veamos como continuar en dimensiones mayores.

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$. Decimos que f es diferenciable en el origen $(0, \dots, 0)$, si $\exists$ una transformación lineal afi

$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{f(x_1, \dots, x_n) - L(x_1, \dots, x_n)}{|(x_1, \dots, x_n)|} = 0$$

Como en el caso de dos variables, haciendo tender $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $0 = (0, \dots, 0)$ por puntos de la forma $(0, \dots, x_i, \dots, 0)$ obtenemos la siguiente expresión para L :

$$L(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + f(0, \dots, 0)$$

La gráfica de L en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ es el espacio tangente a la gráfica de f sobre el origen.

Definición: Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, diremos que es diferenciable si

(1) es diferenciable en cada punto de su dominio

(2) la matriz $Df_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)$ varía continuamente con x .

El Teorema de la función inversa.

Una transformación lineal de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es invertible si y sólo si su determinante es $\neq 0$. Esto nos da un criterio muy sencillo de invertibilidad. Invertir una matriz es una operación con la cual es posible resolver un sistema de ecuaciones lineales con igual número de incógnitas que de ecuaciones. Si queremos resolver sistemas con ecuaciones no lineales ¿podremos dar un criterio

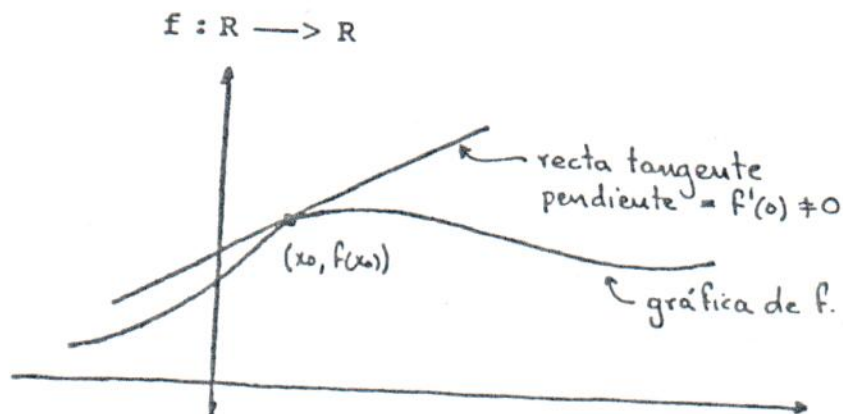
como el de arriba?.

El teorema de la función inversa nos da ese criterio:

Teorema: Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que
 $|Df_{x_0}| \neq 0$, entonces f es invertible en una vecindad pequeña
de x_0 .

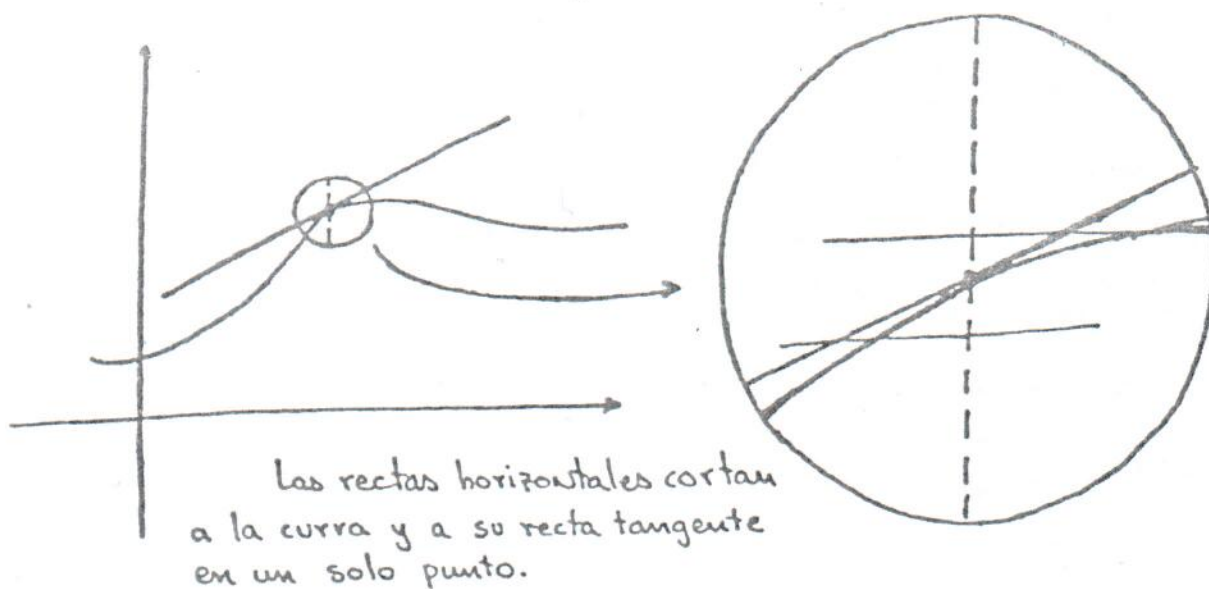
La demostración de este teorema se basa en que siendo la diferencial invertible y tan buena su aproximación a la función cerca de x_0 , ésta también será invertible.

Como hicimos antes, analicemos primero el caso de una función de una sola variable, con valores reales



En este caso el determinante de la diferencial es simplemente el valor de la derivada $f'(0)$, que es la pendiente de la recta tangente.

Si la derivada es distinta de cero, entonces la recta tangente no es horizontal y por lo tanto, cada recta horizontal la corta en un solo punto. Esta propiedad, que es la condición para que una función se pueda invertir, se hereda a la curva $y = f(x)$ por estar tan cercana a la recta tangente cerca de $(x_0, f(x_0))$.



Como $f'(x_0) \neq 0$, entonces $f'(x) \neq 0$ en una vecindad de x_0 . Ahí $|f'(x)|$ alcanza un mínimo m y por el teorema del valor medio tenemos:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x - y)| \geq m |x - y| \neq 0$$

así, $f(x) = f(y) \Rightarrow 0 = |f(x) - f(y)| \geq m |x - y| \Rightarrow x = y$ y por lo tanto f es inyectiva en esa vecindad de x_0 .

Analizar geométicamente este resultado en dimensiones mayores es un ejercicio para el desarrollo de la intuición que puede iniciarse con el análisis de ejemplos concretos de funciones como:

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$$

Antes de pasar a la demostración del teorema de la función inversa, conviene recordar el significado de la norma de una transformación lineal $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$|L| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|L(x)|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |L(x)|$$

Es muy fácil verificar que $|L(x)| \leq |L| |x|$

Demostración del Teorema de la función inversa.

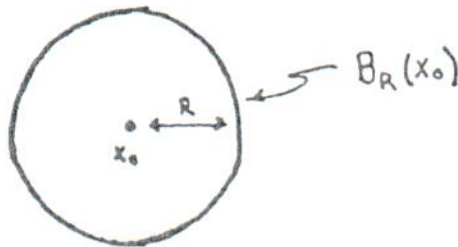
Daremos la demostración para el caso en que $x_0 = f(x_0) = 0$:
 $Df_{x_0} = I$, la matriz identidad con unos en la diagonal y ceros fuera de ella. El resultado general del enunciado del teorema se obtiene componiendo con dos translaciones y con la transformación lineal $[Df_{x_0}]^{-1}$ que es invertible y para las cuales el teorema es evidentemente cierto.

Sea $g(x) = f(x) - x$, entonces $g(0) = 0$ y $Dg_0 = 0$, es la matriz cero.

Como $|Dg_0| = 0$, por continuidad sabemos que hay una bola de radio R y centro en x_0 , $B_R(x_0)$, tal que:

$$|Dg_x| < \frac{1}{4}$$

$$\forall x \in B_R(x_0)$$



Ahora bien, para cada par $x, y \in B_R(x_0)$ podemos escribir:

$$g(x) - g(y) = Dg_x (x - y) + h(x, y)$$

y tenemos que:

$$a) \lim_{y \rightarrow x} \frac{h(x, y)}{|x - y|} = 0 \quad \text{y por consiguiente si } R \text{ es suficiente-}$$

te pequeño

$$|h(x, y)| < \frac{1}{4} |x - y|$$

$$b) |g(x) - g(y)| \leq |Dg(x)| |x - y| + |h(x, y)|$$

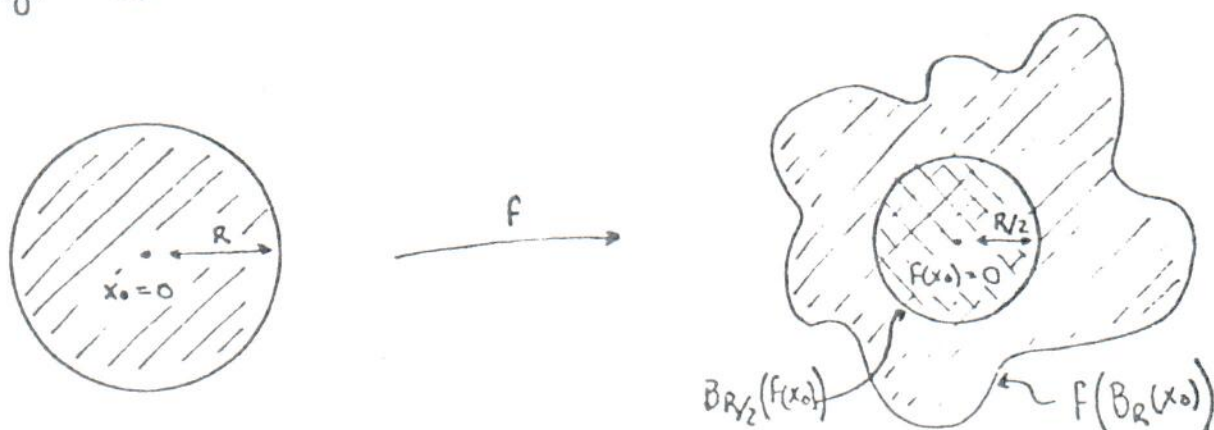
$$\leq \frac{1}{4} |x - y| + \frac{1}{4} |x - y| = \frac{1}{2} |x - y|$$

pero entonces:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |g(x) - g(y) - (x - y)| \\ &\geq |x - y| - |g(x) - g(y)| \geq |x - y| - \frac{1}{2} |x - y| = \frac{1}{2} |x - y| \end{aligned}$$

y por lo tanto f es inyectiva en $B_R(x_0)$.

Ahora veremos que $f(B_R(x_0))$ cubre a la vecindad de radio $R/2$ de $f(x_0) = 0$.



Para cada $y \in B_{R/2}(f(x_0))$ consideremos la siguiente sucesión:

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = y$$

$$x_2 = y - g(x_1)$$

...

$$x_n = y - g(x_{n-1})$$

...

Esta sucesión está en $B_R(x_0)$ y converge a una preimagen de y .

Esto se sigue fácilmente de que:

$$|x_1 - x_0| = |y| < R/2$$

$$|x_n - x_{n-1}| \leq |g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})| \leq R/2^n$$

Así pues f tiene una inversa

$$f^{-1}: B_{R/2}(f(x_0)) \longrightarrow B_R(x_0)$$

Esta construcción de la sucesión x_n , se puede llevar a nivel de funciones simplemente definiendo

$$g_n: B_{R/2}(f(x_0)) \longrightarrow B_R(x_0) \quad \text{como:}$$

$$g_0(y) = 0$$

$$g_n(y) = y - g(g_{n-1}(y))$$

de esta manera resulta inmediato que

- a) g_n es diferenciable en $B_{R/2}(f(x_0))$
- b) g_n converge a f^{-1} uniformemente en $B_{R/2}(f(x_0))$
- c) g'_n converge uniformemente en $B_{R/2}(f(x_0))$

y de esto último y el siguiente ejercicio, resulta que f^{-1} es diferenciable.

Ejercicio: Sea g_n una sucesión de funciones diferenciables que converge uniformemente a g . Supóngase también que la sucesión de derivadas g'_n converge uniformemente a G . Entonces g es diferenciable y su derivada g' es igual a G .

Más aun, utilizando la regla de la cadena es fácil ver que siendo f^{-1} diferenciable, necesariamente se tiene:

$$Df_{y_0}^{-1} = [Df_{(f^{-1}(y_0))}]^{-1}$$

lo que en pocas palabras puede quedar como "la diferencial de la inversa es la inversa de la diferencial".

c) El Teorema del Rango.

El Teorema de la función inversa es un resultado que habla del comportamiento local de una función. Nos dice lo que pasa en una vecindad de un punto. Más tarde estaremos interesados en estudiar algunos aspectos del comportamiento global de las funciones diferenciables y es con esa finalidad que estudiaremos una generalización de este teorema conocida como el Teorema del Rango.

En lo sucesivo, $B_R(0)$ denotará la bola de radio R y centro en el origen de $\mathbb{R}^n$, cualquiera que sea la n y $V(x_0)$ denotará alguna vecindad abierta de x_0 .

Por un difeomorfismo, se entenderá una función diferenciable, invertible y con inversa diferenciable.

Antes de enunciar el Teorema del Rango, recordemos que el rango de una transformación lineal es la dimensión de su imagen (que es menor que la dimensión del dominio y que la del contradominio de la misma).

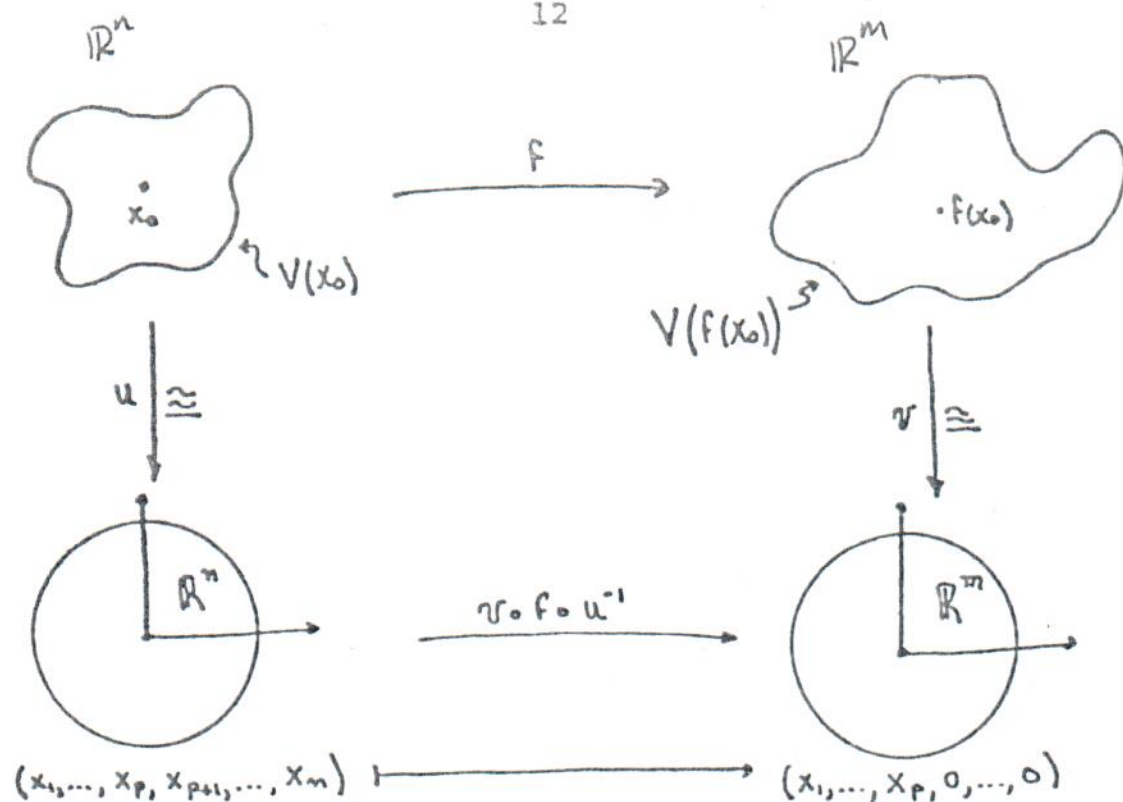
Teorema del Rango: Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable y supóngase que la transformación lineal Df_x tiene rango p para toda x en alguna vecindad de x_0 .

Entonces existen difeomorfismos:

$$u: V(x_0) \longrightarrow B_R(0)$$

$$v: V(f(x_0)) \longrightarrow B_R(0)$$

tales que la composición $v \circ f \circ u^{-1}$ es la proyección en las primeras p -coordenadas, como se ilustra en el siguiente diagrama:



Como veremos más adelante cuando estudiemos los espacios llamados variedades diferenciables, este teorema dice que la imagen de una función diferenciable cuya diferencial tiene rango p es una variedad de dimensión p .

De este teorema se derivan directamente el teorema de la función inversa que estudiamos antes y el teorema de la función implícita que puede consultarse en cualquier texto de cálculo. Este enunciado del teorema del rango es el más conveniente para nuestros propósitos y haremos bastante uso de él en lo siguiente.

Demostración del teorema del rango.

Supongamos que $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$, $f(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^m$ y que Df_x tiene rango $p \forall x \in V(0)$. Ahora bien, matricialmente

$$Df_0 =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

y que tenga rango p , significa simplemente que hay una submatriz cuadrada de tamaño $p \times p$ con determinante distinto de cero y que cualquier submatriz cuadrada de tamaño mayor que $p \times p$ tiene determinante cero. Haciendo una permutación de índices tanto en el dominio como en el contradominio, es decir permutando renglones y columnas de la matriz, se puede llevar el bloque $p \times p$ de determinante no nulo a la esquina superior izquierda. De este modo podemos suponer que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

tiene determinante no nulo.

Sea $u : V(0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$u(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x), \dots, f_p(x), x_{p+1}, \dots, x_n)$$

donde $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Entonces

$$Du_x =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} & & \\ \hline & & & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

tiene determinante no nulo $\forall x \in V(0)$ y por el teorema de la función inversa u es invertible en una vecindad de cero.

Sea

$$u^{-1} : B_R(0) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ la inversa de } u.$$

Si consideramos que

$$(y_1, \dots, y_n) = u(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x), \dots, f_p(x), x_{p+1}, \dots, x_n),$$

es fácil ver que $f \circ u^{-1} : B_R(0) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tiene la siguiente expresión:

$$f \circ u^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_p, \varphi_{p+1}(y), \dots, \varphi_m(y)) \quad \forall (y_1, \dots, y_n) \in B_1$$

Así, la diferencial de $f \circ u^{-1}$ se ve como:

$$D(f \circ u^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & & \\ \hline & & & 0 & \\ \hline ? & & \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial y_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial y_n} \\ & & \vdots & & \\ & & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_{p+1}} & & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

y puesto que el rango de esta matriz debe ser p se sigue que:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial y_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Así, todas esas derivadas parciales son cero, lo que significa que las funciones $\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_m$ no dependen de las variables $y_{p+1}, \dots, y_n$. Entonces podemos definir

$$v : V(0) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{dada por:}$$

$$(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_p, x_{p+1} - \varphi_{p+1}(x_1, \dots, x_p), \dots, x_m - \varphi_m(x_1, \dots, x_p))$$

La diferencial de v es

$$Dv_x = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & ? & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{array} \right)$$

que tiene determinante no nulo y nuevamente por el teorema de la función inversa v es un difeomorfismo. No es difícil ahora verificar la afirmación del teorema.

Para terminar con este capítulo, solamente enunciaremos el Teorema de Sard que nos provee de la herramienta técnica necesaria para demostrar el Teorema de transversalidad de Thom más adelante.

Teorema de Sard: Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable
(infinitamente diferenciable) y sea

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Df_x \text{ no es de rango máximo}\}$$

Entonces $f(C) \subset \mathbb{R}^m$ tiene interior vacío y por lo tanto su com-
plemento denso.

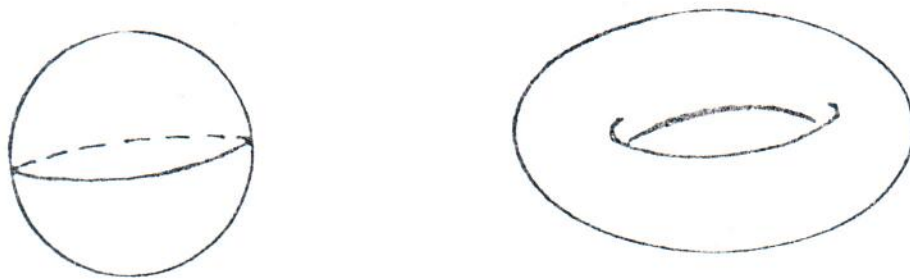
C se llama al conjunto de puntos críticos de f .

Una bonita demostración de este teorema puede encontrarse en
 [J. Milnor, Topology from the differentiable view point, The Univ.
 press of Virginia, 1965].

2. Variedades.

Sistemas de Coordenadas.

Pienso que todos conocemos de alguna manera el concepto de su perficie. Por ejemplo, reconocemos la esfera y la dona o toro de la figura de abajo:



Estas superficies están aquí pintadas en el plano, pero mejor aun, podemos imaginarlas en nuestras manos. De esta manera diremos que las superficies estan encajadas en R^3 .

Lo que haremos ahora, será formalizar el concepto de superficie encajada en R^3 y generalizarlo hasta el de variedad encajada en R^N . En lo sucesivo conviene pensar en que N es un número grande.

Definición: Un subespacio $V \subset R^N$ es una variedad diferenciable de dimensión n , o simplemente una variedad, si para cada punto $x_0 \in V$ hay una vecindad $V(x_0) \subset R^N$ y un difeomorfismo

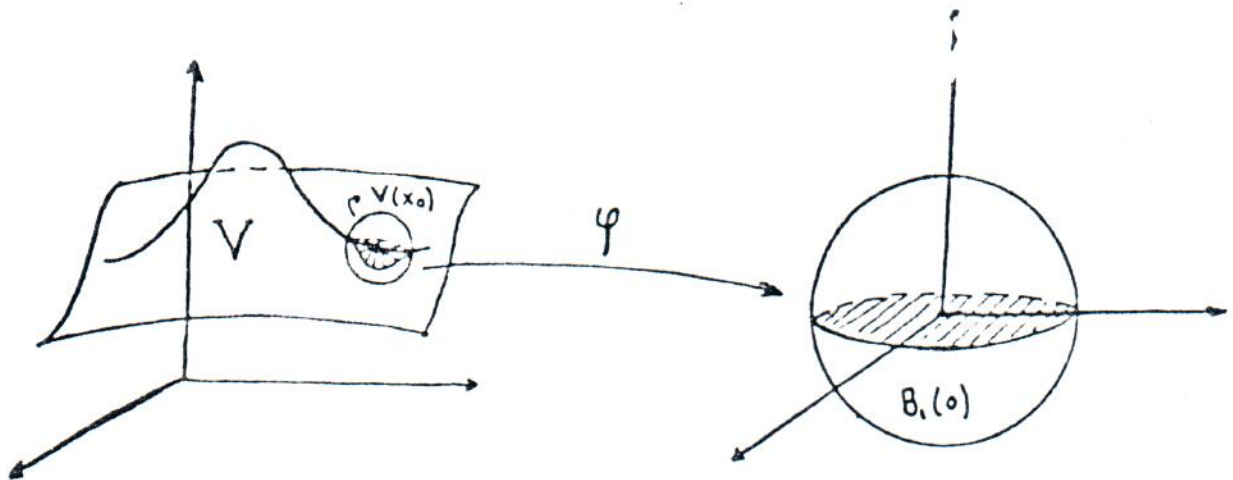
$$\varphi: V(x_0) \longrightarrow B_1(0) = \{x \in R^N \mid |x| < 1\}$$

tal que:

$$1) \quad \varphi(x_0) = 0$$

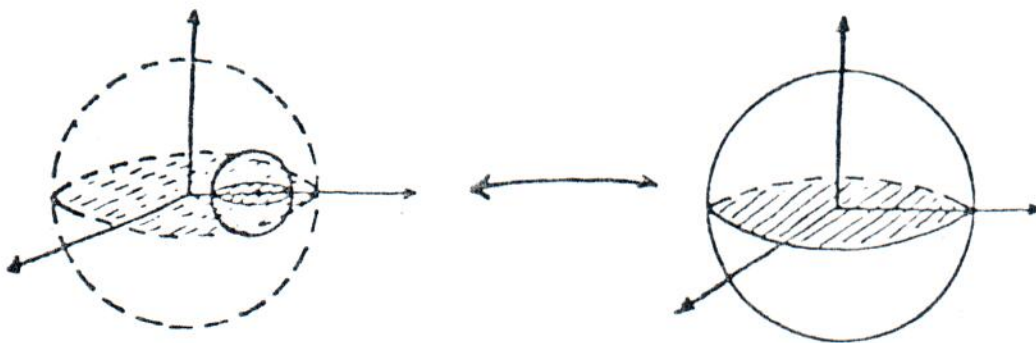
$$2) \quad = \varphi^{-1}\{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in B_1(0)\}$$

↙ nótese que son n las coordenadas que quedan libres



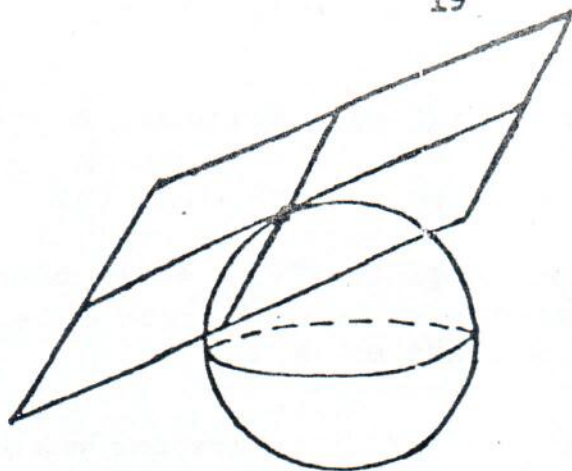
Al diffeomorfismo φ le llamamos un sistema de coordenadas en
 $x_0 \in V$

La condición $\varphi(x_0) = 0$ es superflua porque si $\varphi(x_0) \neq 0$,
 siempre por una translación y una aplificación, que son difeomor-
 fismos, se puede llevar una bola con centro en $\varphi(x_0)$ sobre
 $B_1(0)$ enviando $\varphi(x_0)$ en cero.



El espacio Tangente a una variedad.

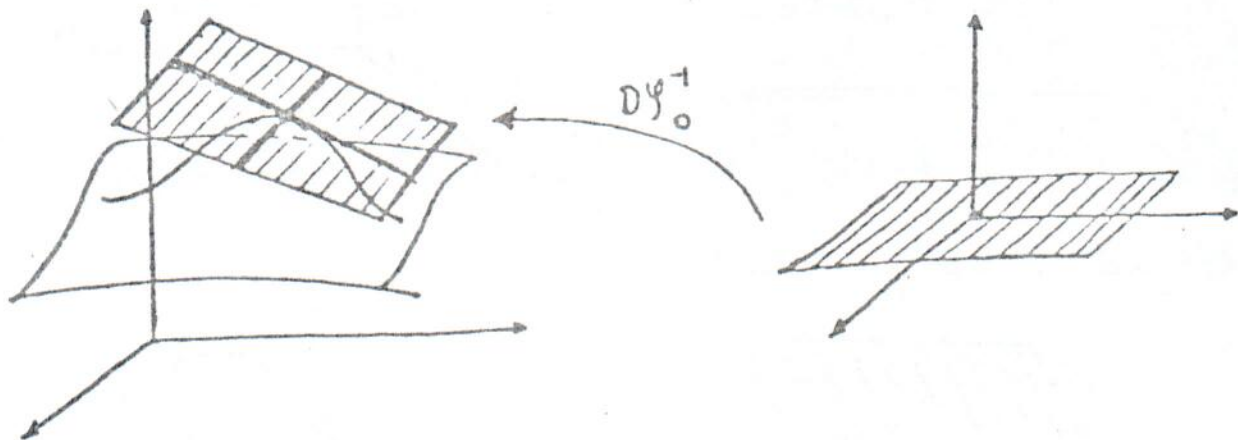
En el caso de una superficie podemos asignarle a cada punto un
 plano tangente



El objeto de pedir en la definición de variedad que φ sea un difeomorfismo es para poder asignarle a cada punto de la variedad un espacio tangente, aprovechando directamente el hecho de que $D\varphi^{-1}$ es una transformación lineal afín invertible.

El espacio tangente a la variedad V en el punto x_0 , denotado por TV_{x_0} , queda definido por:

$$TV_{x_0} = D\varphi_0^{-1} \{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N\}$$



El sistema de coordenadas φ endereza localmente a la variedad V . La endereza puesto que su imagen bajo φ consiste precisamente de los puntos que tienen las últimas $N-n$ coordenadas igual a cero. Ahí en la imagen de φ , donde V está plano, es muy natural hablar del espacio tangente como del mismo plano de

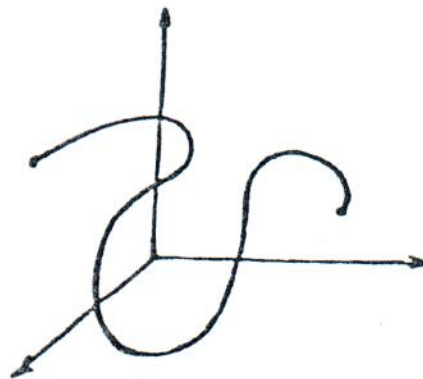
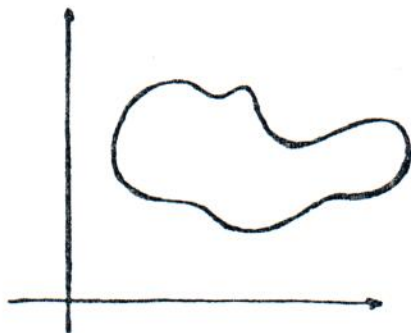
la variedad, para después empujar este plano con la transformación lineal $D\varphi_0^{-1}$ como se ilustra en la figura anterior.

Obsérvese que el espacio tangente TV_{x_0} es un subespacio afín de $\mathbb{R}^N$ de dimensión n , anclado en x_0 .

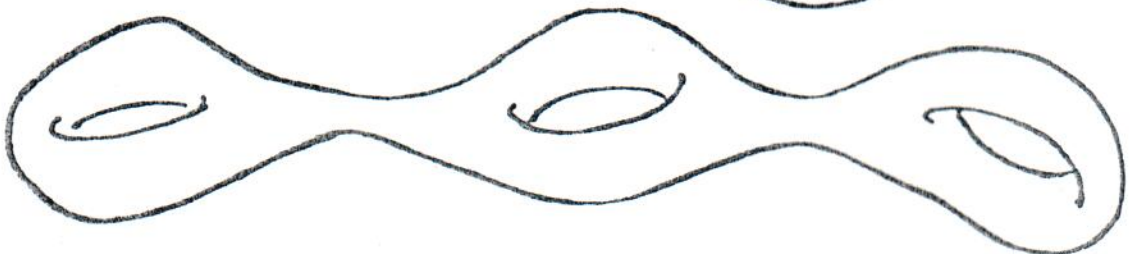
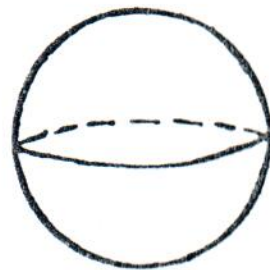
Ejercicio: En la definición de TV_{x_0} interviene una carta coordenada. ¿Por qué esta definición no depende de la carta coordenada que se tome?

Ejemplos de Variedades:

1. Curvas en el plano o en el espacio



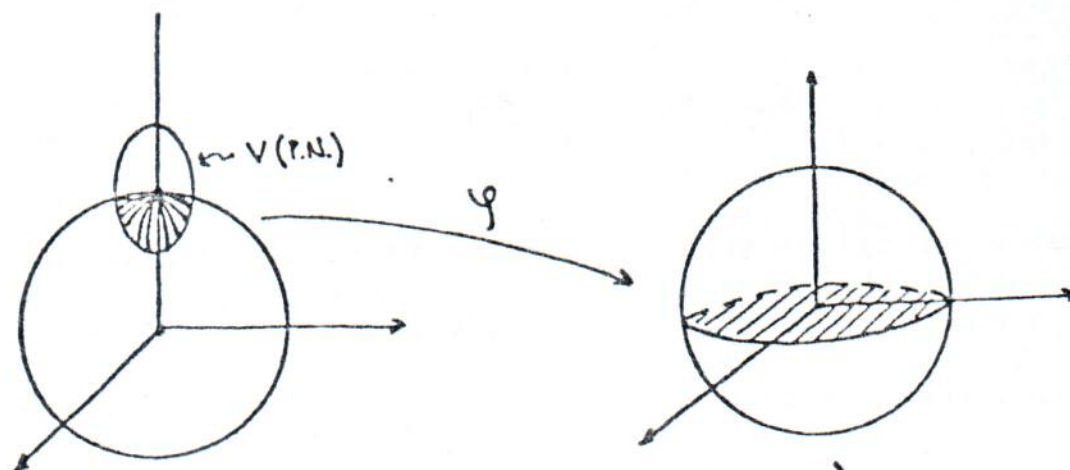
2. Superficies en el espacio



3. La esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una variedad de dimensión n .

El siguiente es un sistema de coordenadas en el polo norte

$$P.N. = (0, \dots, 0, 1)$$



$$\varphi(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_{n-1}, 1 - (x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2))$$

4. El espacio Proyectivo P^n .

Considérese la función f descrita en el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & f & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{m} & \mathbb{R}^{2n+1} \end{array}$$

en donde Δ es la diagonal $\Delta(x) = (x, x)$ y m es la multiplicación polinomial dada por:

$$m(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n) = (z_0, \dots, z_{2n})$$

con z_i igual al coeficiente de t^i en el polinomio

$$(x_0 + x_1 t + \dots + x_n t^n) (y_0 + y_1 t + \dots + y_n t^n)$$

La función f es diferenciable y tiene las siguientes propiedades:

$$1) f(x) = f(y) \iff x = \pm y$$

2) Df_x tiene rango $n+1$, si $x \neq 0$

Todo esto se verifica rapidamente para $n=1$ puesto que en ese caso:

$$f(x_0, x_1) = (x_0^2, 2x_0x_1, x_1^2) \quad y$$

$$Df_x = \begin{pmatrix} 2x_0 & 0 \\ 2x_1 & 2x_0 \\ 0 & 2x_1 \end{pmatrix}$$

e igualmente fácil es verificarlo para otros valores de n .

Como espacio Topológico, el espacio proyectivo P^n se obtiene al identificar cada punto de la esfera S^n con su antipoda ($x \sim -x$). Ya que $f(x) = f(y)$ $x = \pm y$, el espacio proyectivo resulta ser homeomorfo a la imagen bajo f de la esfera S^n . Así tenemos:

$$P^n = f(S^n) \subset R^{2n+1}$$

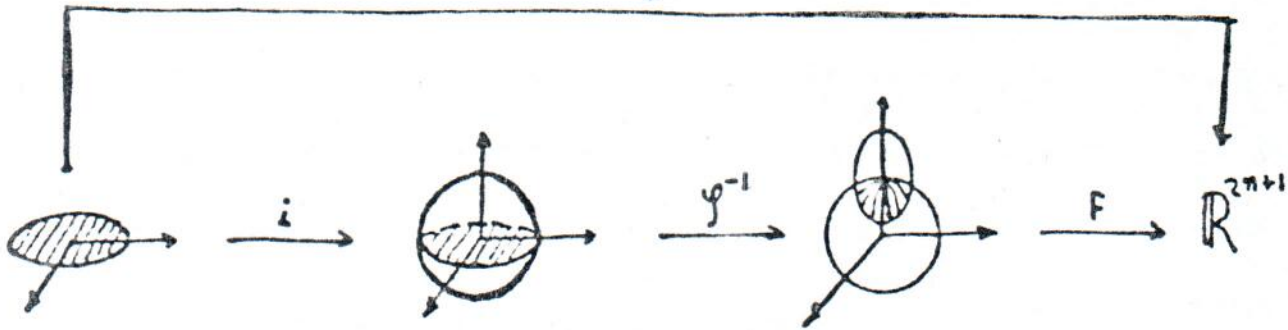
El espacio P^n es una variedad de dimensión n encajada en R^{2n+1} . Para convencernos de ello indicaremos como conseguir un sistema de coordenadas en $(0, \dots, 0, 1) = f(0, \dots, 0, 1) \in P^n$.

Sea φ el sistema de coordenadas en el polo norte de S^n descrito anteriormente y g la composición indicada en el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & g & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ P^n & \xrightarrow{i} & R^{n+1} & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & R^{n+1} & \xrightarrow{f} & R^{2n+1} \end{array}$$

donde i es la inclusión en las primeras coordenadas.

g



Por el teorema del rango, sabemos que existe un difeomorfismo ψ , de una vecindad de $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ sobre una vecindad de cero en $\mathbb{R}^{2n+1}$ tal que $\psi \circ g$ es la inclusión en las primeras n coordenadas. Entonces ψ es el sistema de coordenadas buscado.

Ejercicio: Dar explícitamente un sistema de coordenadas en $(0, 0, 0, 0, 1) \in \mathbb{P}^2$.

5. El grupo $O(n)$.

El conjunto de matrices cuadradas $n \times n$, que denotaremos por $M(n)$ puede identificarse con $\mathbb{R}^{n^2}$, simplemente considerando los vectores hilera uno a continuación del otro

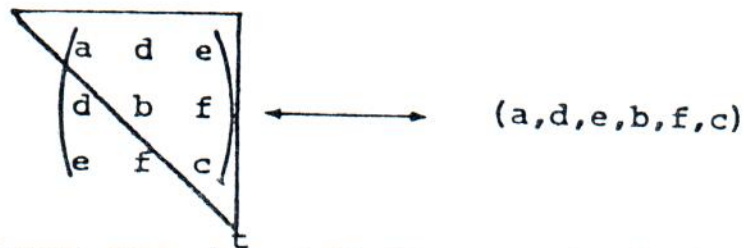
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a, b, c, d)$$

La transpuesta de una matriz se obtiene al intercambiar renglones por columnas. Se obtiene también al hacer una reflexión sobre la diagonal principal como se ilustra en el siguiente ejemplo:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{transposición}} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

diagonal principal

Las matrices simétricas $n \times n$ son aquellas que coinciden con su transpuesta. En estas matrices, los coeficientes en uno de los lados de la diagonal principal determinan a los del otro lado y de esta forma, el conjunto de matrices simétricas puede identificarse con $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ como indicamos a continuación:



Denotemos por A^t a la transpuesta de la matriz A y consideremos la función:

$$\varphi: M(n) \longrightarrow S(n) \quad \text{dada por}$$

$$\varphi(A) = AA^t$$

No es difícil darse cuenta que cada función coordenada de φ es un polinomio y que por lo tanto φ es diferenciable.

El grupo ortogonal $O(n)$ consiste de aquellas matrices que tienen como inversa a su transpuesta

$$O(n) = \{A \in M(n) \mid AA^t = I\}$$

en donde I = identidad. La estructura de grupo está dada por la multiplicación usual de matrices.

Veremos que $O(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ es una variedad de dimensión $n(n-1)/2$. Para esto utilizaremos nuevamente el teorema del rango. Obsérvese que:

$$O(n) = \varphi^{-1}(I)$$

Aseguramos que I es un valor regular de φ , i.e. que si $\varphi(A) = I$, entonces $D\varphi_A$ es de rango máximo, en este caso igual a la dimensión del contradominio $n(n+1)/2$.

Calculemos entonces el valor de $D\varphi_A$ en el punto B , como si que:

$$\begin{aligned} D\varphi_A(B) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi(A+rB) - \varphi(A)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{rBA^t + r^2 BB^t + rAB^t}{r} = BA^t + AB^t \end{aligned}$$

Ahora bien, dado $C \in S(n)$ tomemos $B = \frac{1}{2} CA$. Entonces, como $AA^t = I$ se tiene:

$$D\varphi_A(B) = BA^t + AB^t = \frac{1}{2} CAA^t + A\left(\frac{1}{2} CA\right)^t = \frac{1}{2} (C + C^t) = C$$

quedando con esto probado que $D\varphi_A$ es sobre y por lo tanto de rango igual a $n(n+1)/2$.

Finalmente indicaremos como utilizar el teorema del rango para conseguir un sistema de coordenadas en $A \in O(n)$.

Como φ tiene rango máximo en los puntos de $O(n)$, entonces tiene rango máximo en una vecindad de cada uno de ellos y por lo tanto se puede aplicar el teorema del rango que asegura que existen difeomorfismos $\psi: V(A) \rightarrow B_1(0)$ y $\rho: V(I) \rightarrow B_1(0)$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M(n) \supset V(A) & \xrightarrow{\varphi} & V(I) \subset S(n) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \rho \\ \mathbb{R}^{n^2} \supset B_1(0) & \xrightarrow[\text{n(n+1)/2 coordenadas}]{\text{proyección en las primeras}} & B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \end{array}$$

Así, ψ es el sistema de coordenadas buscado.

Funciones diferenciables entre variedades.

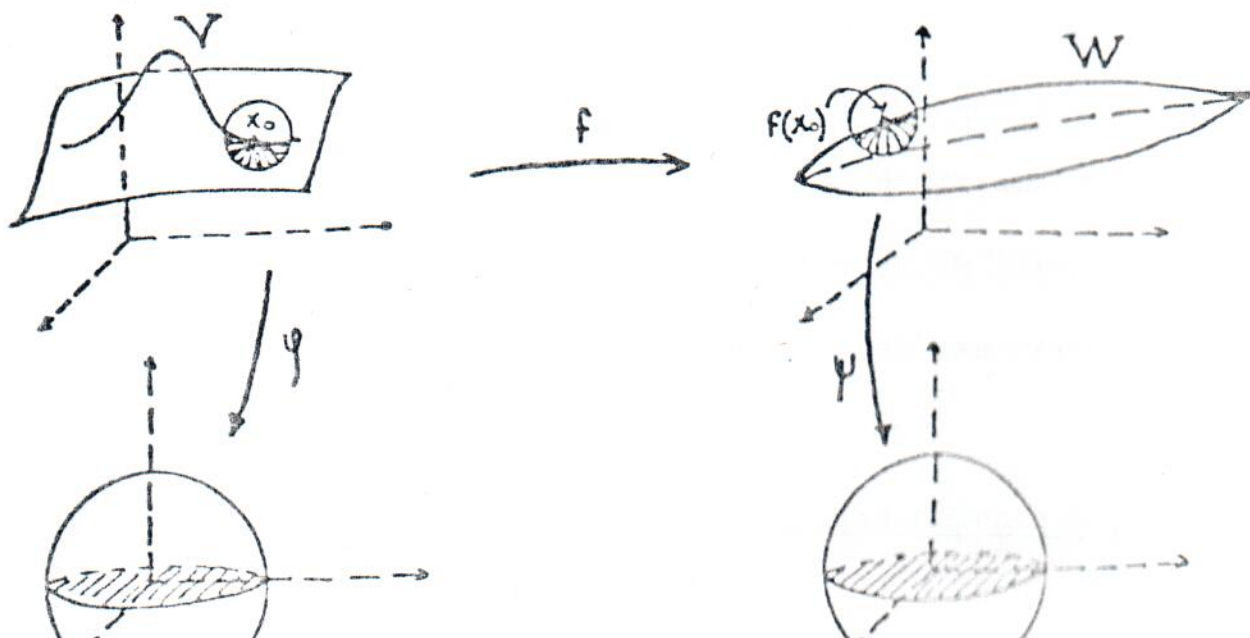
Sean $V \subset \mathbb{R}^N$, $W \subset \mathbb{R}^M$ dos variedades diferenciables de dimensiones n y m respectivamente y

$$f: V \longrightarrow W$$

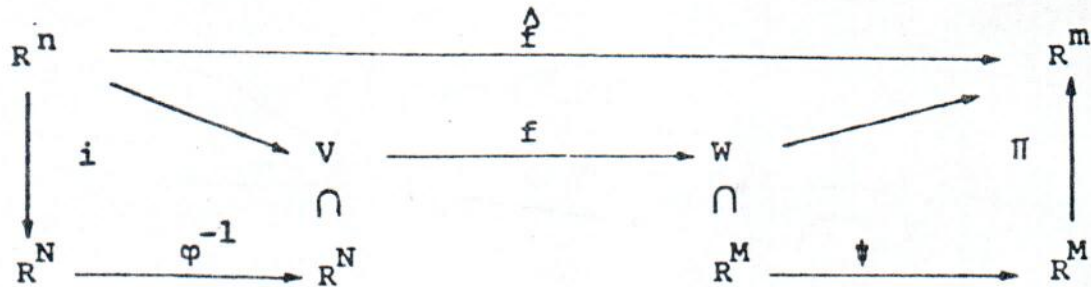
una función entre ellas ¿Cómo darle sentido a la oración "f es diferenciable"?.

Bueno, recordemos que siempre hemos dicho que una función es diferenciable, si lo es en cada punto de su dominio; la diferenciablez de una función es una cuestión local. Aunque esto no contesta nuestra pregunta, si dirige nuestra atención hacia lo que pasa en una vecindad de un punto de la variedad.

Sea $x_0 \in V$ y sean ϕ y ψ sistemas coordenados en $x_0 \in V$ y $f(x_0) \in W$, respectivamente.



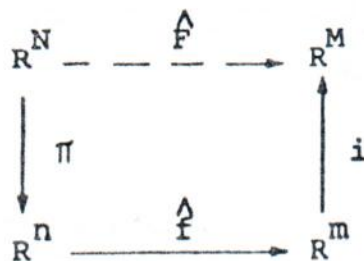
El sistema de coordenadas φ manda la variedad V en los puntos de $\mathbb{R}^N$ que tienen las últimas $N-n$ coordenadas ceros y hace lo correspondiente con W y $\mathbb{R}^M$. Esto permite inducir una función $\hat{f}$ como sigue:



en donde i es la inclusión en las primeras n coordenadas y π es la proyección en las primeras coordenadas.

Diremos que f es diferenciable si $\hat{f}$ lo es.

Nótese que la función $\hat{f}$ puede extenderse trivialmente a una función de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^M$:

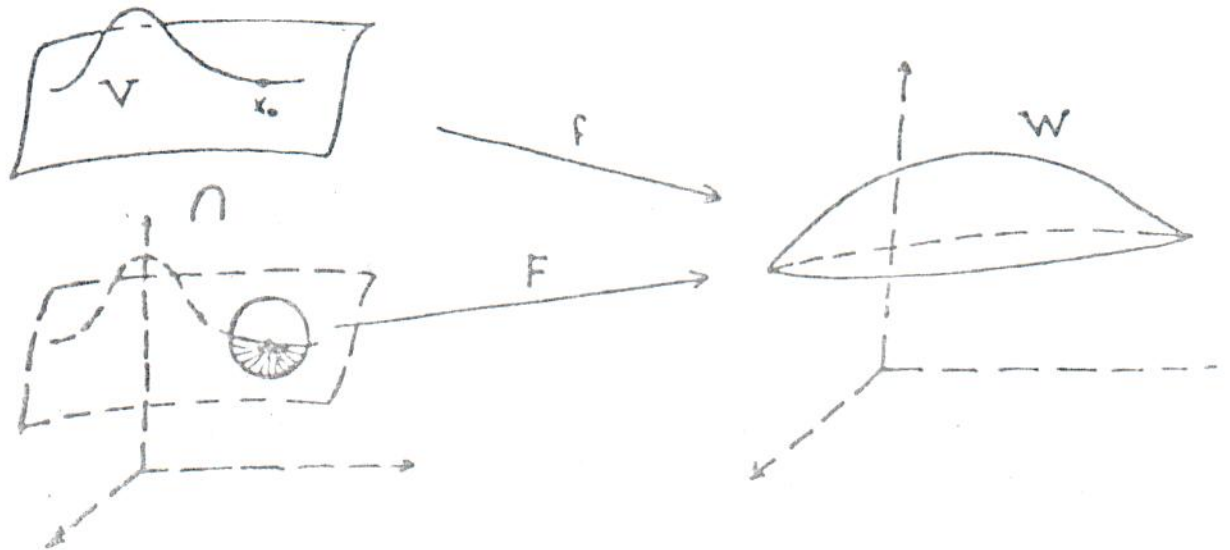


Esta función $\hat{F}$ es diferenciable si y sólo si $\hat{f}$ lo es y por lo tanto si f es diferenciable, $\hat{F}$ también lo será. Ahora bien, siendo este el caso, la función

$$F = \varphi \circ \hat{F} \circ \varphi^{-1}$$

es una extensión continua de f a una vecindad de x_0 en $\mathbb{R}^N$.

Hemos visto entonces que $f: V \rightarrow W$ es diferenciable en $x_0 \in V$ si y sólo si f se extiende a una función diferenciable F en una vecindad de x_0 en $\mathbb{R}^N$.

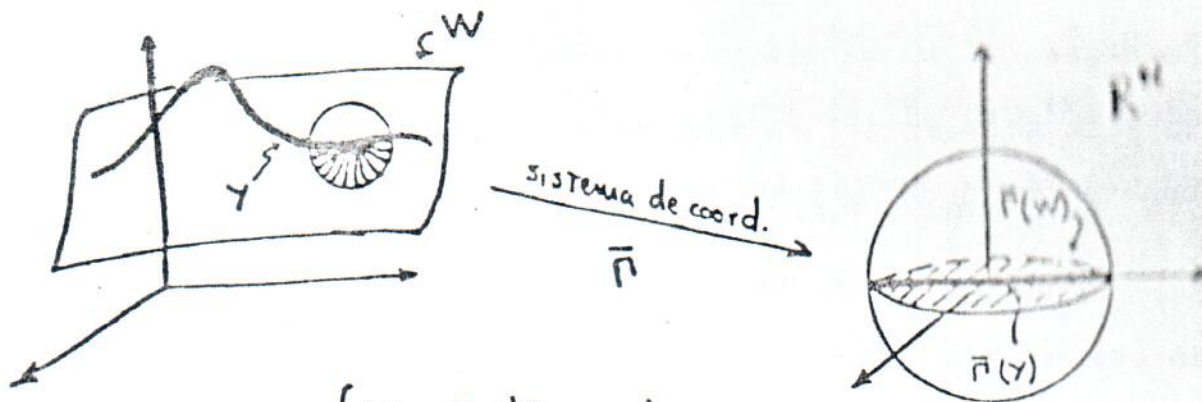


Esta extensión de f no es única (¿por qué?), sin embargo en lo anterior vimos como dado un sistema de coordenadas en x_0 podemos construir explícitamente una extensión. En todo lo que sigue nos referiremos siempre a una extensión como esta.

Subvariedades

Sea $W \subset \mathbb{R}^M$ una variedad diferenciable y $Y \subset W \subset \mathbb{R}^M$ un subespacio que a su vez sea variedad. Diremos entonces que Y es una subvariedad de W .

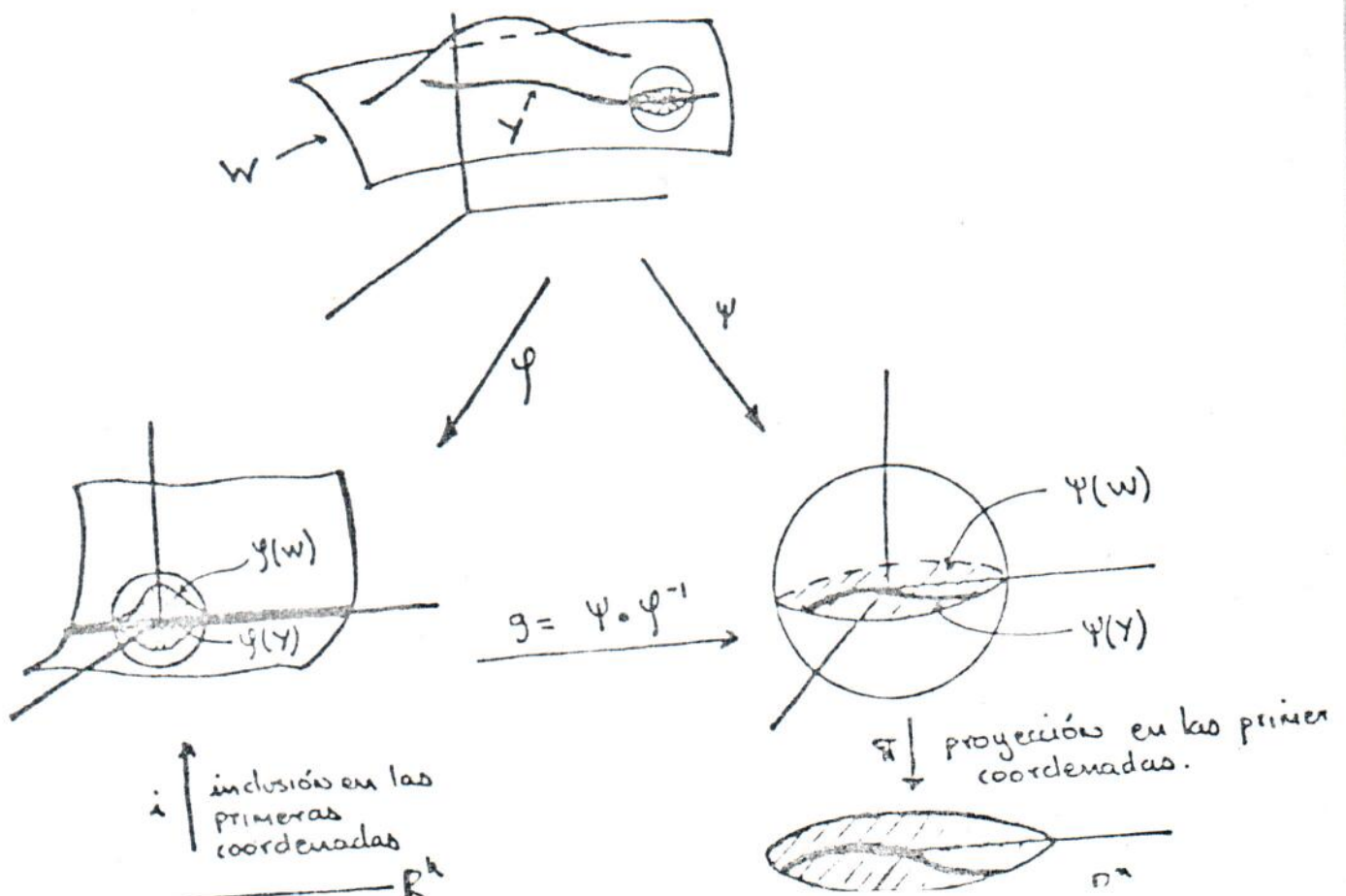
Ahora veremos como aplicando el teorema del rango, podemos conseguir para cada punto $y \in Y$, un sistema de coordenadas para W que a su vez sea un sistema de coordenadas para Y como se ilustra en seguida:



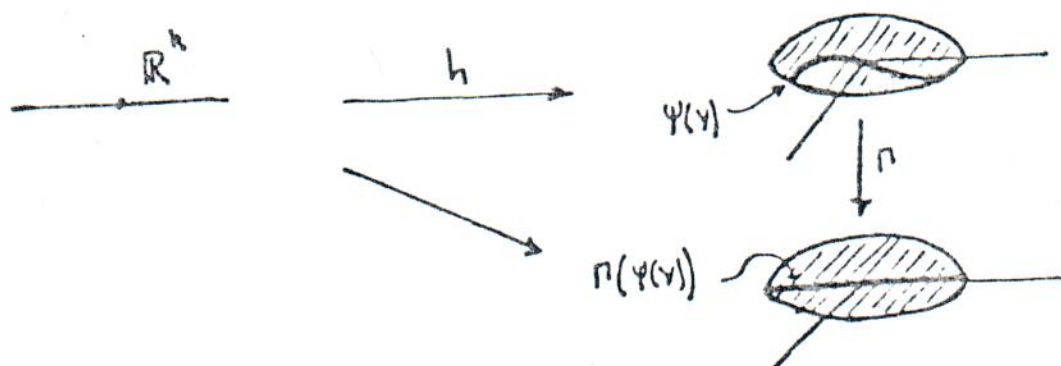
Localmente
$$\begin{cases} Y = \bar{P}^{-1}(?, 0, 0) \\ W = \bar{P}^{-1}(?, ?, 0) \end{cases}$$

Sean $m = \text{dimensión de } W$, $k = \text{dimensión de } Y$.

Sabemos que tanto Y como W son variedades y por lo tanto podemos tomar sistemas de coordenadas para ellas en un punto cualquiera $y_0 \in Y$. Sean φ y ψ estos sistemas de coordenadas respectivamente.



Nótese que en el dibujo anterior, la función h es diferenciable y la diferencial es inyectiva puesto que la imagen de $\varphi(Y)$ bajo g cae dentro de $\psi(Y)$ que está aplanada y la restricción de Π a ese plano es un difeomorfismo; luego, podemos aplicar el teorema del rango para obtener un difeomorfismo Γ como se ilustra en la figura:



Este difeomorfismo tiene el efecto de aplanar a $\psi(Y)$. Ahora extendemos el difeomorfismo Γ a un difeomorfismo de R^N como:

$$\bar{\Gamma} : R^n \times R^{N-n} \longrightarrow R^n \times R^{N-n}$$

$$\bar{\Gamma}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_N) = (\Gamma(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}, \dots, x_N)$$

Es muy fácil verificar ahora que la composición $\bar{\Gamma} \circ \psi$ es un sistema de coordenadas en Y_0 para ambas variedades Y y W .

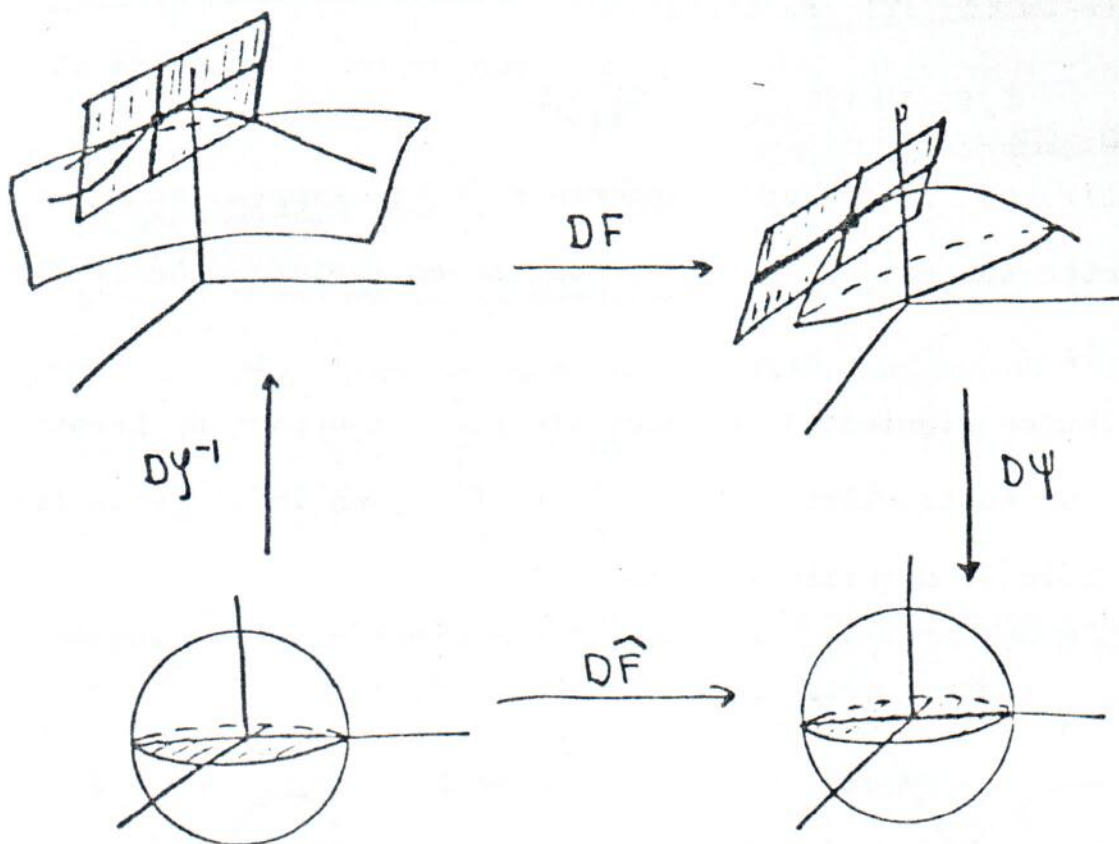
La diferencial de una función entre variedades.

Como antes, sean $V \subset R^N$, $W \subset R^M$ dos variedades diferenciables de dimensiones n y m respectivamente y

$$f : V \longrightarrow W$$

una función diferenciable. Sea $x_0 \in V$ y F una extensión de f a una vecindad de x_0 en R^N , como antes.

Ahora utilizaremos la diferencial de F , para definir la diferencial de f . Obsérvese que DF_{x_0} manda el espacio tangente a W en el espacio tangente a W como se ilustra en la siguiente figura:



Hecha esta observación, definimos la diferencial de f , como la transformación lineal afín

$$f_* : TV_{x_0} \longrightarrow TW_{f(x_0)}$$

que es la restricción de la diferencial de F en x_0 , al espacio tangente de V .

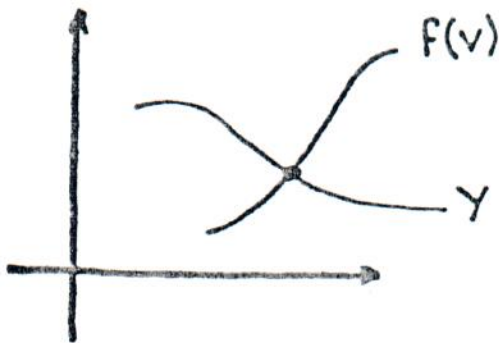
TRANSVERSALIDAD.

Sean V y W variedades, $Y \subset W$ subvariedades y $f: V \rightarrow W$ una función diferenciable. Decimos que f es transversal a Y si para todo punto $v \in f^{-1}(Y)$ se tiene:

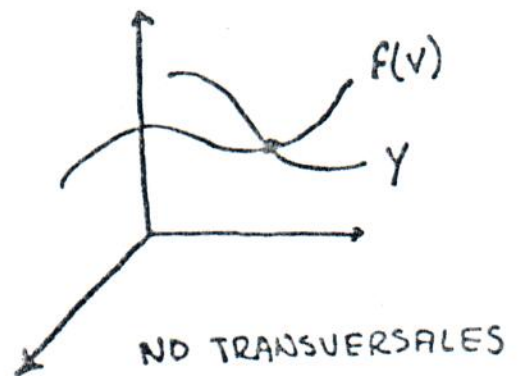
$$f_*(T_v V) + T_{f(v)} Y = T_{f(v)} W$$

Es decir, que todo vector tangente a W se expresa como suma de un vector tangente a Y más un vector en la imagen de la diferencial f_* .

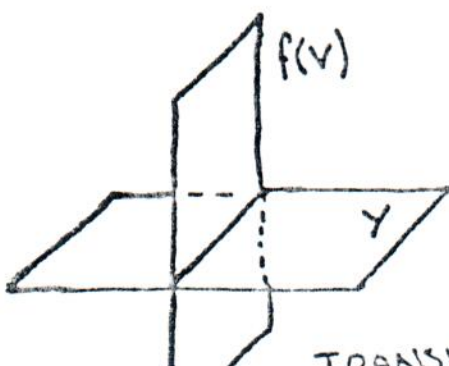
Los dibujos siguientes intentan ilustrar la noción de transversalidad. En todos ellos W es $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$ y en lugar de la función f sólo se describe su imagen $f(V)$.



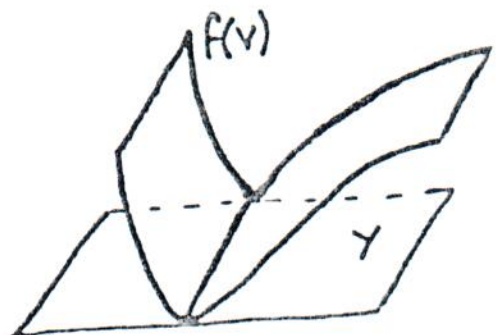
TRANSVERSALES



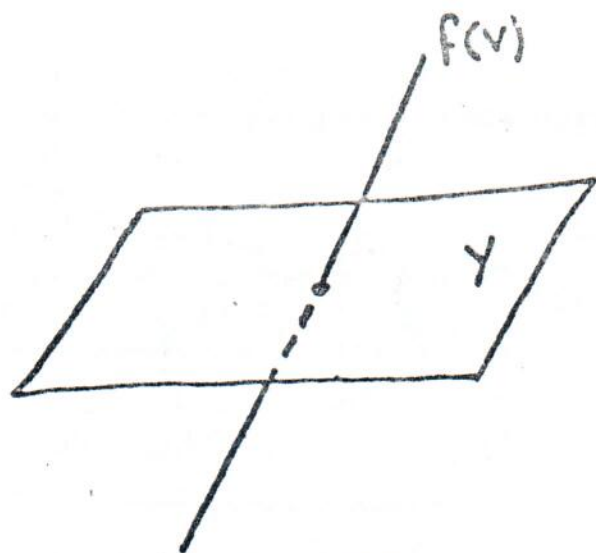
NO TRANSVERSALES



TRANSVERSALES



NO TRANSVERSALES



TRANSVERSALES



NO TRANSVERSALES

En el caso en que la subvariedad $Y \subset W$ consiste de un sólo punto, $Y = \{y\}$, transversalidad significa simplemente que para todo punto $v \in f^{-1}(y)$, la diferencial

$$f_* : T_v \longrightarrow T_y^W$$

es sobre. También decimos entonces que $y \in W$ es un valor regular de f .

Sean $n = \dim V$, $m = \dim W$ y $k = \dim Y$. Diremos que Y tiene codimensiones $m - k$ en W .

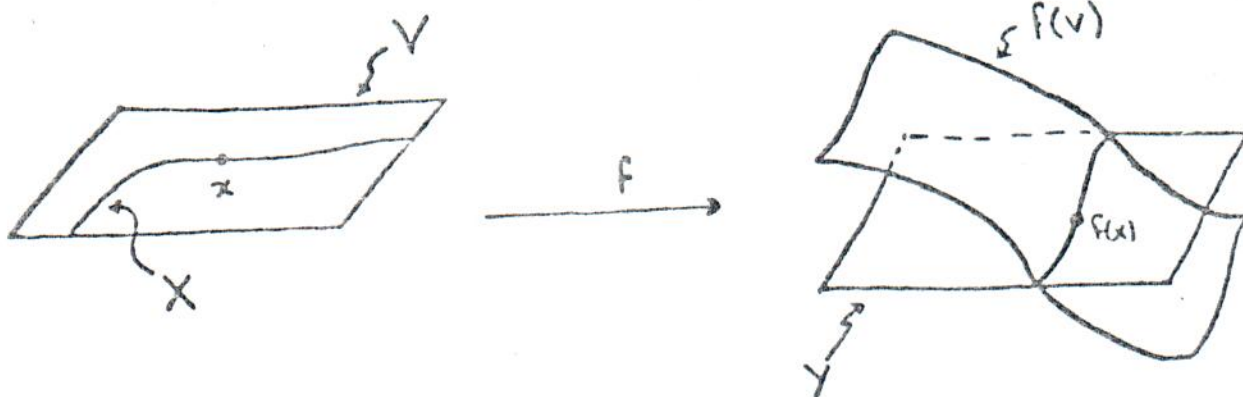
El concepto de codimensión es interesante en vista del siguiente resultado que nos será muy útil en lo sucesivo.

Teorema: Si $f: V \rightarrow W$ es transversal a $Y \subset W$, entonces

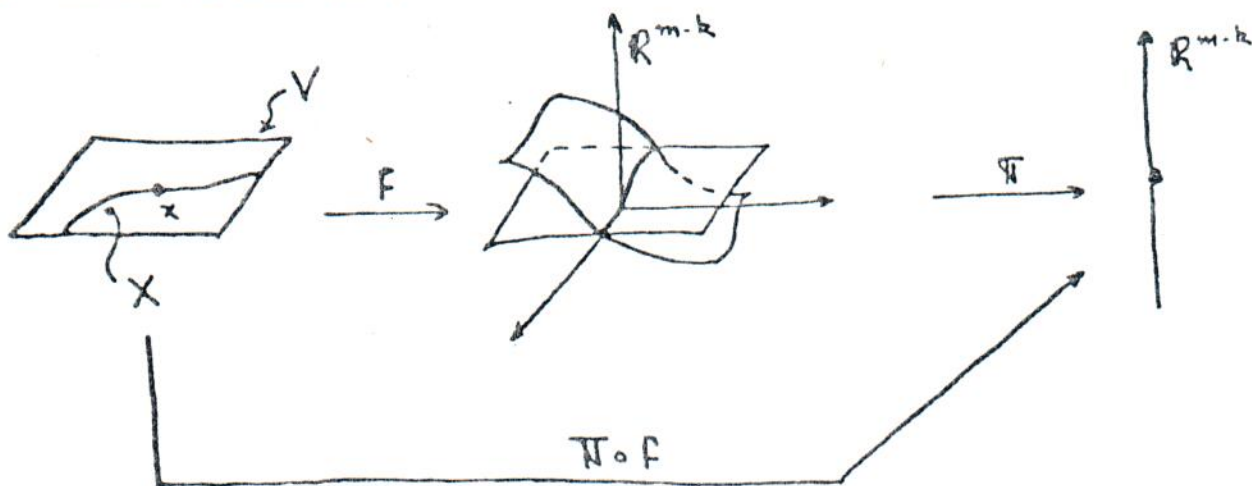
$X = f^{-1}(Y) \subset V$ es una subvariedad de V de la misma codimensión que la de Y en W .

Demostración: Sea $x \in X$. Si tomamos un sistema de coordenadas para $x \in V$ y un sistema de coordenadas para $f(x) \in W$ que enderece también la subvariedad Y , podemos describir el comportamiento de

f localmente, cerca de x , como se ilustra en seguida:



En este sistema de coordenadas la subvariedad Y consiste precisamente de los puntos que tienen las últimas $m-k$ coordenadas igual a cero, siendo $m-k$ la codimensión de Y en W . Ahora proyectamos sobre éstas últimas $m-k$ coordenadas y componemos f con la proyección:



La composición $\pi \circ f$ resulta ser una función diferenciable que satisface las dos siguientes propiedades:

- $X = (\pi \circ f)^{-1}(\pi(Y))$. Nótese que $\pi(Y)$ es un punto.
- $D(\pi \circ f)_x$ es sobre.

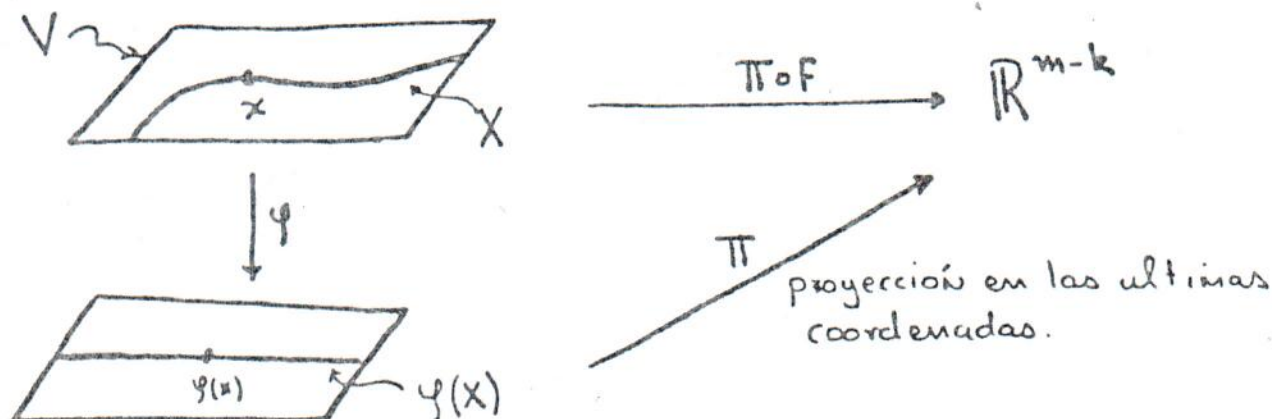
Esta segunda propiedad requiere de una breve explicación:

Siendo la proyección π una transformación lineal, su diferencial es ella misma. Así, queda claro que $D\pi_{f(x)}$ es sobre y tiene como núcleo precisamente a $T_{f(x)}Y$. Aplicando ahora $D\pi_{f(x)}$ a la condición de transversalidad, tenemos:

$$(D\pi_{f(x_0)} \circ f_*) (T_x V) = D\pi_{f(x_0)} [f_* T_x V + T_{f(x)} Y] = D\pi_{f(x_0)} T_{f(x)} W$$

y por lo tanto $D\pi_{f(x)} \circ f_*$ es sobre, que es lo que queríamos mostrar.

Para terminar la demostración, sólo falta aplicar el teorema del rango a $\pi \circ f$ para obtener un difeomorfismo $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que la composición $\pi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es la proyección en las últimas $m-k$ coordenadas.



El difeomorfismo φ es un sistema de coordenadas para X en el punto x .

Ahora dirigiremos nuestra atención hacia el Teorema de transversalidad de Thom, básico en el desarrollo de la teoría de intersección de variedades. Empecemos con el siguiente resultado:

Consideremos a R^k como subvariedad de $R^n = R^k \times R^{n-k}$.

Teorema: Sea $f: R^m \rightarrow R^k \times R^{n-k}$ una función diferenciable. Entonces se puede encontrar $v \in R^{n-k}$, con $|v|$ tan pequeña como se quiera de suerte que la función

$$h_v: R^m \rightarrow R^k \times R^{n-k} \quad \text{dada por}$$

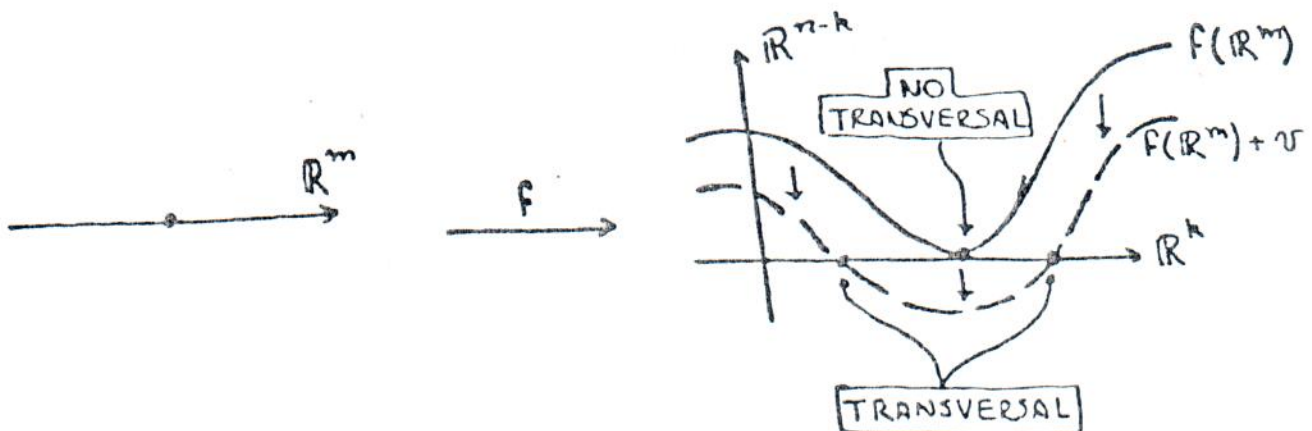
$$h_v(x) = f(x) + (0, v)$$

sea transversal a R^k .

Demostración: Considérese la siguiente función:

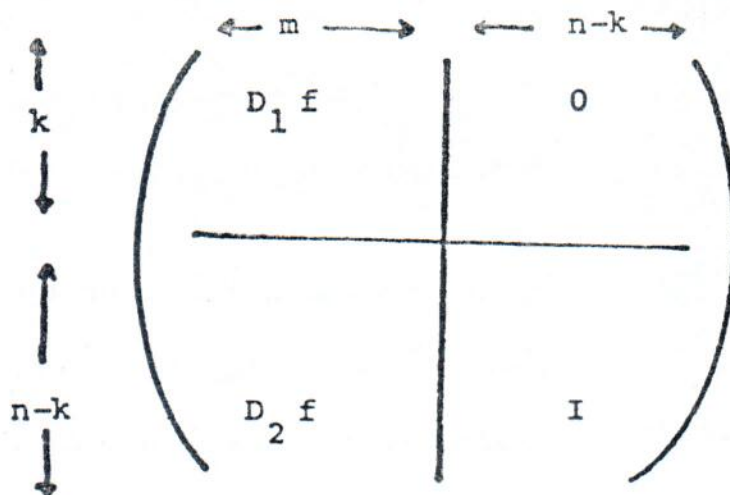
$$H: R^m \times R^{n-k} \rightarrow R^k \times R^{n-k} \quad \text{dada por}$$

$$H(x, v) = f(x) + (0, v)$$



Sea $\pi: R^k \times R^{n-k} \rightarrow R^{n-k}$ la proyección en las últimas coordenadas. Nótese que la condición de que f sea transversal a R^k es equivalente a que la composición $\pi \circ f$ tenga a cero como valor regular.

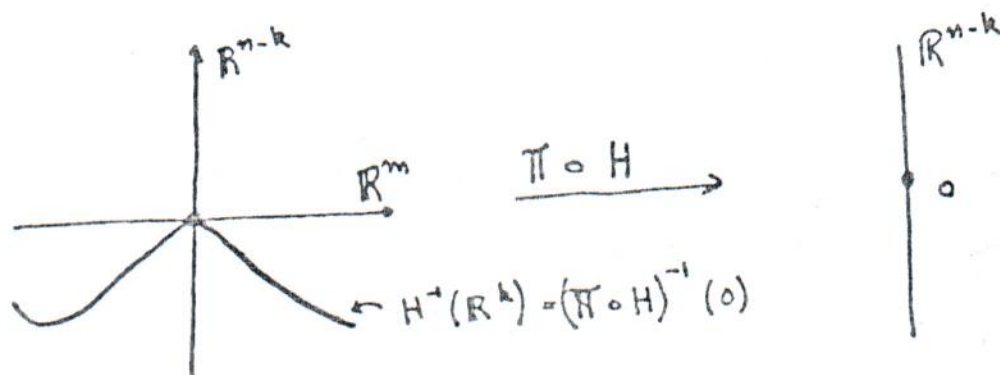
La diferencial de H , expresada en bloques queda:



y la diferencial de $\pi \circ H$ es:

$$(D_2 f \mid I)$$

que es de rango máximo, puesto que en el bloque derecho aparece siempre la matriz identidad. Así, $\pi \circ H$ tiene a cero como valor regular y $(\pi \circ H)^{-1}(0)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-k}$ de codi mensión $n-k$. Nótese que $(\pi \circ H)^{-1}(0) = H^{-1}(\mathbb{R}^k)$.



Ahora sea $p: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ la proyección en las últimas coordenadas y consideremos $\bar{p}$, la restricción de ésta a $H^{-1}(\mathbb{R}^k)$.

$$\bar{p}: H^{-1}(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

Sea $v \in \mathbb{R}^{n-k}$ un valor regular de $\bar{p}$. Veremos que entonces la función

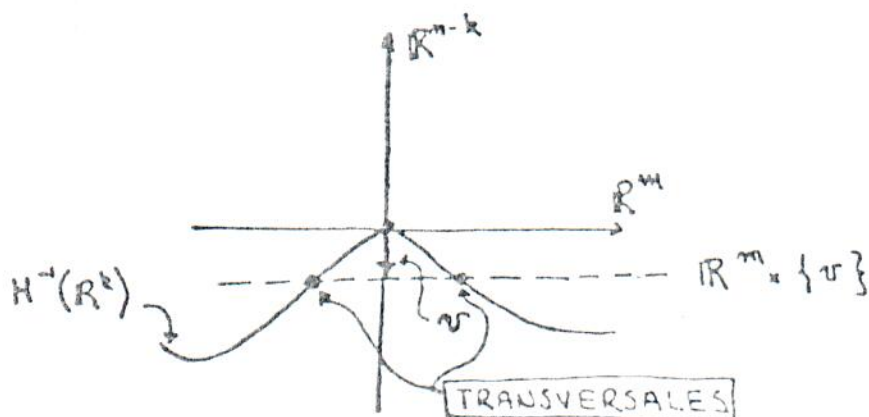
$$h_v(x) = f(x) + (0, v)$$

es transversal a $\mathbb{R}^k$.

Primero veamos el significado de que $v \in \mathbb{R}^{n-k}$ sea un valor regular de $\bar{p}$, lo cual puede ser por dos razones:

a) Porque v no está en la imagen de $\bar{p}$, en cuyo caso la imagen de la función h_v no intersecta a la subvariedad $\mathbb{R}^k$ y por lo tanto es transversal a ésta.

b) Si v está en la imagen de $\bar{p}$. En este caso, $\bar{p}^{-1}(v)$ es precisamente la intersección de las subvariedades $\mathbb{R}^m \times \{v\}$ y $H^{-1}(\mathbb{R}^k)$ y la condición de que v sea valor regular de $\bar{p}$ se traduce el hecho de que estas dos subvariedades de dimensiones complementarias m y $n-k$ se intersecten transversalmente. Convencerse de este hecho es un ejercicio para el lector.



Ahora regresemos al argumento original para ver que si v es un valor regular de $\bar{p}$ entonces la función h_v es transversal a $\mathbb{R}^k$.

Para eso recuérdese que H tiene las siguientes propiedades.

1) H es transversal a R^k .

2) DH envía cualquier vector tangente a $H^{-1}(R^k)$ dentro de R^k

Así, como el espacio tangente a $R^m \times R^{n-k}$ es la suma directa de los espacios tangentes a $R^m \times \{v\}$ y $H^{-1}(R^k)$, tenemos que la restricción de H a la subvariedad $R^m \times \{v\}$ es transversal a R^k . Esta restricción es h_v como se indica en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 R^m & \xrightarrow{h_v} & R^k \times R^{n-k} \\
 \searrow i_v & & \swarrow H \\
 & R^m \times R^{n-k} &
 \end{array}$$

en donde $i_v(x) = (x, v)$.

La demostración del teorema termina con una aplicación del Teorema de Sard, que nos asegura que el conjunto de valores regulares de $\bar{p}$ es un subconjunto denso de R^{n-k} y por lo tanto basta tomar uno de ellos con norma tan pequeña como se quiera.

Ahora, haremos una observación sobre el teorema anterior: Sea

$$\begin{aligned}
 & n: R^m \longrightarrow R \quad \text{dada por} \\
 n(x) = & \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{R^2 - |x|^2}\right) & \text{si } |x| \leq R \\ 0 & \text{si } |x| \geq R \end{cases}
 \end{aligned}$$

Si en la demostración del teorema ponemos

$$H(x, v) = f(x) + n(x)(0, v)$$

al final obtenemos que la función h_v , queda dada por:

$$h_v(x) = f(x) + h(x)(0, v)$$

y puesto que $h(x) = 0$ cuando x está fuera de $B_R(0)$; ahí las funciones f y h_v coinciden.

Ahora supongase que fuera de $B_R(0) \subset \mathbb{R}^m$, la función f ya es transversal a $\mathbb{R}^k$, esto es que

$$f: \mathbb{R}^m - B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

es transversal a $\mathbb{R}^k$. Entonces h_v es transversal a $\mathbb{R}^k$ y coincide con f fuera de $B_R(0)$. La moraleja de esta observación es que no hace falta modificar f más que en una vecindad del conjunto donde no es transversal.

Antes de enunciar el teorema de transversalidad de Thom en la forma más adecuada para el desarrollo de la teoría de intersección, introduciremos dos nuevos conceptos; el de variedad con frontera y el de homotopía entre funciones.

Definición: Un subespacio $V \subset \mathbb{R}^N$ es una variedad con frontera de dimensión n , si para cada punto $x_0 \in V$ hay una vecindad $V(x_0) \subset \mathbb{R}^N$ y un difeomorfismo

$$\varphi: V(x_0) \rightarrow B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < 1\}$$

tal que:

$$1) \quad \varphi(x_0) = 0$$

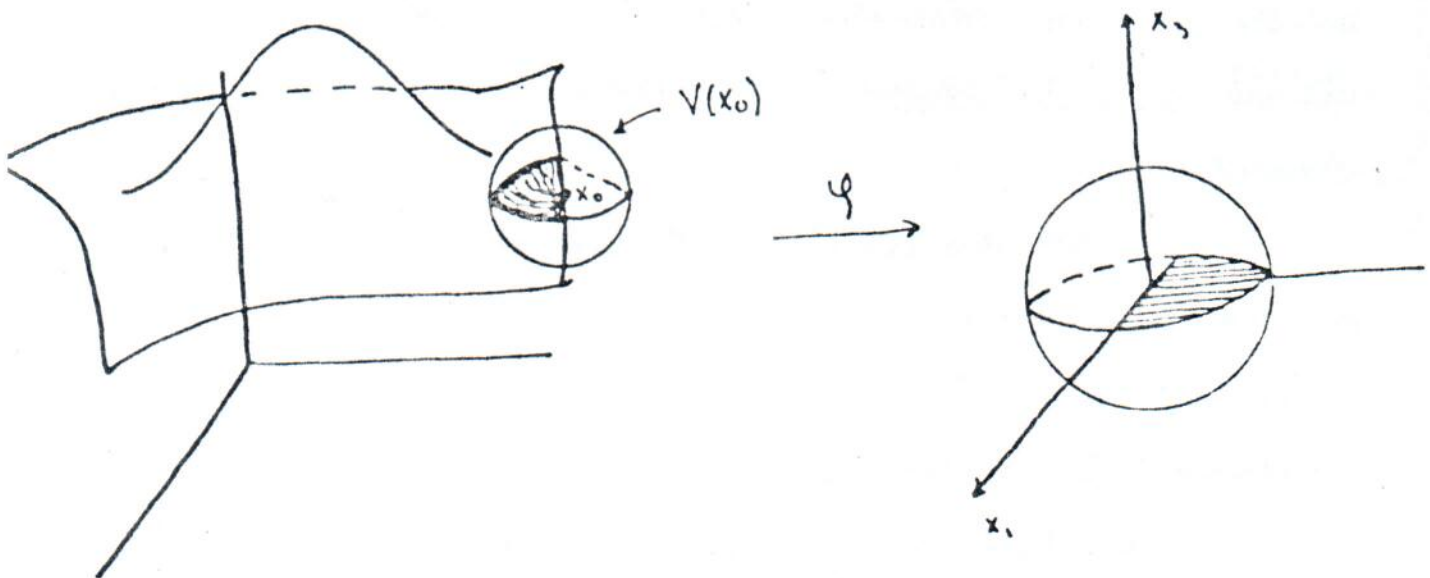
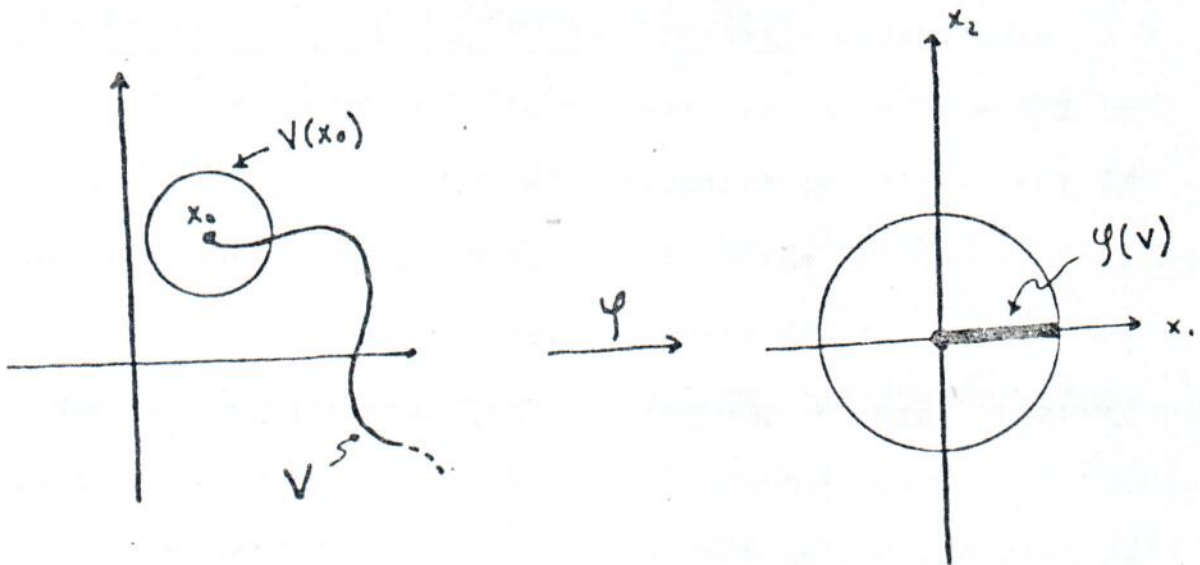
2) Una de las siguientes condiciones

$$a) \quad = \varphi^{-1}\{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in B_1(0)\}$$

$$\text{ó } b) \quad = \varphi^{-1}\{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in B_1(0) \mid x_n \geq 0\}$$

En el caso a) decimos que x_0 es un punto interior de V . En el caso b) decimos que x_0 es un punto frontera de V . Denotemos por ∂V al conjunto de puntos de frontera de V

Comparese esta definición con la de variedad dada anteriormente. Los siguientes dibujos ilustran el concepto de variedad con frontera. En ellos x_0 es un punto frontera.



Ejercicio: 1) Sea V una variedad con frontera, de dimensión n . Demuestre que ∂V es una variedad (sin frontera) de dimensión $n-1$ y que $V - \partial V$ es una variedad (sin frontera) de dimensión n .

En vista de este ejercicio, pasamos el concepto de transversalidad a variedades con frontera como sigue:

Sea V una variedad con frontera $f: V \rightarrow W$ una función y $Y \subset W$ subvariedad. Decimos que f es transversal a Y si:

a) $f|_{V - \partial V} \rightarrow W$ es transversal a Y y

b) $f|_{\partial V} \rightarrow W$ es transversal a Y .

Ejercicio: Con la misma idea de la demostración del teorema en la página 33 pruebe el siguiente resultado:

Teorema: Sea V una variedad con frontera y $f: V \rightarrow W$ transversal a $Y \subset W$, entonces $X = f^{-1}(Y) \subset V$ es una subvariedad de V con frontera y $\partial X = f^{-1}(Y) \cap \partial V$.

Ahora pasemos a definir la homotopía entre funciones.

Definición: Sean $f, g: V \rightarrow W$ dos funciones diferenciables, decimos que f es homotópica a g si podemos encontrar una función diferenciable

$$H: V \times [0, 1] \rightarrow W \quad \text{tal que}$$

$$H_0(v) = H(v, 0) = f(v)$$

$$H_1(v) = H(v, 1) = g(v)$$

Consideremos la siguiente función:

$$h: [0, 1] \rightarrow \{\text{funciones de } V \rightarrow W\}$$

donde $h(t)$ es la función de $V \rightarrow W$ dada por

$$h(t)(v) = H(t, v)$$

Ya que $h(0) = f$ y $h(1) = g$, la función h representa un camino dentro del espacio de funciones que empieza en f y termina en g .

Aquí es conveniente hacer una observación sobre el teorema de transversalidad en la página 36 y esta es que las funciones f y h_v son homotópicas, la homotopía dada por

$$H: \mathbb{R}^m \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

$$H(x, t) = f(x) + t(0, v)$$

Ejercicio: Demuestre que la homotopía es una relación de equivalencia.

Finalmente podemos enunciar el teorema de transversalidad.

Para esto, sea V una variedad con o sin frontera, W una variedad (sin frontera) y $Y \subset W$ una subvariedad (sin frontera), tenemos:

Teorema de Transversalidad de Thom.

Dada $f: V \rightarrow W$ una función diferenciable, entonces $\exists g: V \rightarrow W$ tal que:

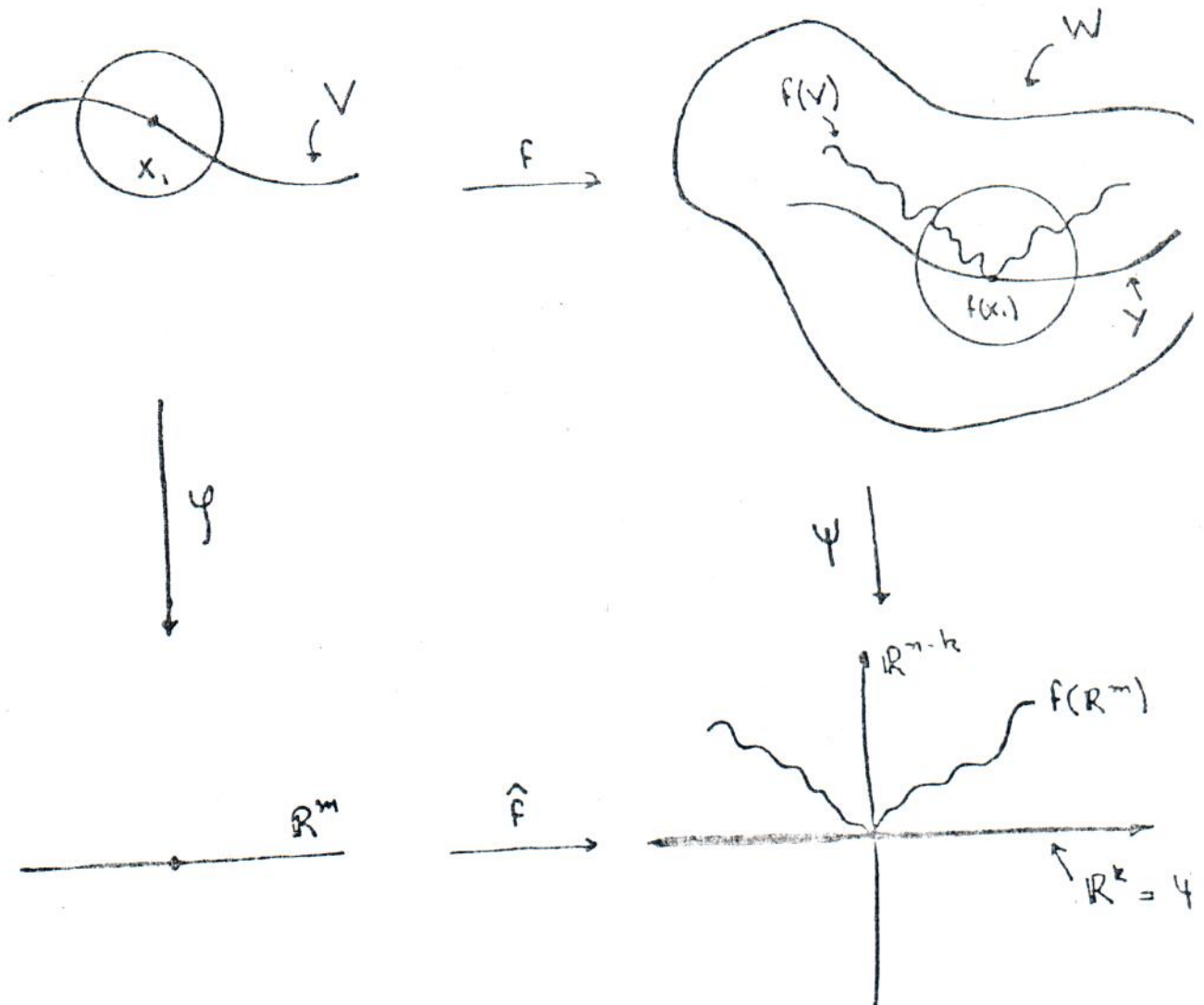
- 1) g es transversal a $Y \subset W$
- 2) g es homotópica a f .

Además en el caso que V sea con frontera, si $f|_{\partial V}$ es transversal a Y ,

- 3) $g|_{\partial V} = f|_{\partial}$.

Demostración: Primero daremos la demostración para el caso en que V es una variedad compacta y sin frontera. Sea $X = f^{-1}(Y)$. Como Y es cerrado, f continua y V compacto, X será compacto.

Construcción principal: Tomemos $x_1 \in X$ sea ψ un sistema de coordenadas de $f(x_1)$ en W que enderece también a la subvariedad Y y φ un sistema de coordenadas de $x_1 \in V$. Entonces la función $f: V \rightarrow W$ se ve localmente como $\hat{f}$ en el siguiente diagrama:



Sea $n: R^m \rightarrow R$ como en la observación de la página 39 (con $R=1$). Apliquemos ahora el Teorema de la página 36 y esta observación a la función $\hat{f}$. De esta manera conseguimos una función $\hat{f}$, homotópica a $\hat{f}$, que coincide con $\hat{f}$ fuera de $B_1(0) \subset R^m$ y tal que su restricción a $B_1(0)$ es transversal a R^k .

Más aún, existe $y_0 \in R^{n-k}$ tal que la homotopía $\hat{H}$ entre $\hat{f}$ y $\hat{g}$ tiene la forma:

$$\begin{aligned}\hat{H}: R^m \times [0,1] &\longrightarrow R^k \times R^{n-k} \\ \hat{H}(x,t) &= f(x) + t n(x)(0, y_0)\end{aligned}$$

Nótese que: 1. $\hat{H}(x,t) = f(x)$ si $|x| > 1$

$$2. \hat{g}(x) = \hat{H}(x,1) = f(x) + n(x)(0, y_0)$$

Sea $V(x_1) = \varphi^{-1}(B_1(0))$ y $H: V \times [0,1] \rightarrow W$ dada por:

$$H(v,t) = \begin{cases} \varphi^{-1} H(\varphi(v), t) & \text{si } v \in V(x) \\ f(v) & \text{si } v \notin V(x) \end{cases}$$

y sea $g: V \rightarrow W$ dada por $g(v) = H(v,1)$.

Entonces tenemos:

1. H es una homotopía entre f y g .
2. La restricción de g a $V(x_1)$ es transversal a Y .
3. g coincide con f fuera de $V(x_1)$

Ahora terminaremos la demostración aplicando la construcción principal repetidas veces como sigue:

Para cada $x \in X$ tomemos un sistema de coordenadas φ y pongamos $V(x) = \varphi^{-1}(B_1(0))$. La colección $\{V(x)\}_{x \in X}$ es una cubierta abierta del compacto X . Sea $\{V(x_1), \dots, V(x_k)\}$ una subcubierta finita.

Aplicamos la construcción principal a f alrededor de $x_1 \in X$ y obtenemos $g_1: V \rightarrow W$ tal que:

- 1) g_1 es homotópica a f .
- 2) g_1 coincide con f fuera de $V(x_1)$
- 3) La restricción de g_1 a $V(x_1)$ es transversal a Y .

En seguida aplicamos la misma construcción pero ahora a g_1 alrededor de $x_2 \in X$ y obtenemos $g_2: V \rightarrow W$ tal que:

- 1) g_2 es homotópica a g_1
- 2) g_2 coincide con g_1 fuera de $V(x_2)$
- 3) La restricción de g_2 a $V(x_2)$ es transversal a Y .

Luego aplicamos la construcción a g_2 alrededor de $x_3 \in X$ para obtener $g_3: V \rightarrow W$ y así sucesivamente hasta terminar con $g_k: V \rightarrow W$. Así conseguimos una sucesión de funciones $g_1, g_2, \dots, g_k$, con las siguientes propiedades:

- 1) g_k es homotópica a g_{k-1} y ésta a $g_{k-2}, \dots$, y ésta a g_1 y ésta a f . Así por transitividad sabemos que g_k es homotópica a f .
- 2) g_k coincide con g_{k-1} fuera de $V(x_1)$.
 g_{k-1} coincide con g_{k-2} fuera de $V(x_2)$
 $\vdots$
 g_1 coincide con f fuera de $V(x_1)$

Así, g_k coincide con f fuera de $V(x_1) \cup \dots \cup V(x_k)$.

3) La restricción de g_1 a $V(x_1)$ es transversal a Y .

La restricción de g_2 a $V(x_1) \cup V(x_2)$ es transversal a Y .

$\vdots$

La restricción de g_k a $V(x_1) \cup \dots \cup V(x_k)$ es transversal a Y .

y como g_k coincide con f fuera de $V(x_1) \cup \dots \cup V(x_k)$ resulta que g_k es transversal a Y .

En el caso en que X no sea compacto, podemos tomar una cubierta numerable y localmente finita, es decir una cubierta $\{V(x_i)\}_{i=1}^\infty$ con la propiedad que para cada $y \in V$ existe una vecindad $V(y)$ tal que $V(y) \cap V(x_i) \neq \emptyset$ solo para un número finito de índices.

Aplicamos la construcción principal como en el caso compacto y obtenemos una sucesión infinita de funciones de $V \rightarrow W$ $g_1, g_2, \dots$. Esa sucesión de funciones resulta convergente. Más aún, ya que la cubierta es localmente finita, para cada $x \in V$, existe una vecindad $V(x)$ tal que para toda $y \in V(x)$ la sucesión $g_1(y), g_2(y), \dots$ se estaciona (es decir $g_N(y) = g_{N+1}(y) = g_{N+2}(y) = \dots$ para N grande). No es difícil con esta observación probar que el límite de esta sucesión tiene las propiedades deseadas, i.e.

1) es homotópica a f

2) coincide con f fuera de $\bigcup_{i=1}^\infty V(x_i)$

3) es transversal a Y .

Ejercicio: La demostración para el caso en que V sea variedad con frontera no presenta ninguna dificultad adicional seria y queda como ejercicio para el lector.

Para demostrar la parte 3) del teorema basta observar que los abiertos $V(x_i)$ que cubren a x pueden tomarse tan pequeños como se quiera (reduciendo el tamaño de R) de manera que $\bigcup_{i=1}^k V(x_i)$ este contenido en el complemento de ∂V .

4. Clasificación de Variedades de dimensión 1.

El propósito de este capítulo es clasificar las variedades de dimensión 1 como último requisito en los preparativos para desarrollar la teoría de intersección de variedades. El resultado de esta clasificación es así:

Teorema: Toda variedad conexa de dimensión 1 es homeomorfa a su intervalo de la recta real, o a la esfera S^1 .

Siendo un intervalo, las únicas posibilidades según que la frontera tenga una componente, dos o ninguna son:

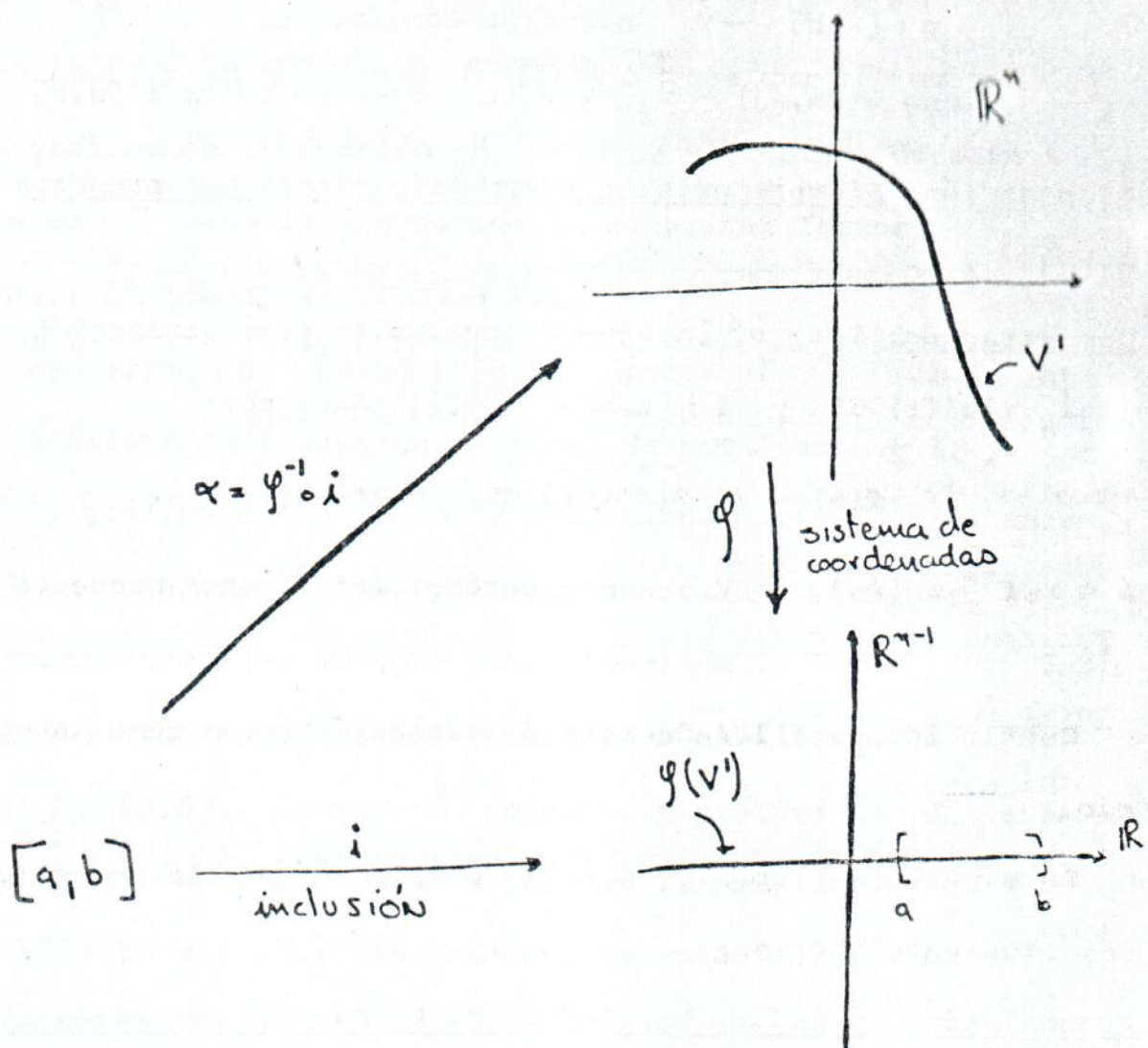
$[0,1]$, $[0,1)$ y $(0,1)$.

Para la demostración del teorema requerimos de los siguientes conceptos. Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ una 1-variedad (o sea, de dimensión 1).

Definición: Una parametrización de V es una función diferenciable, homeomorfismo sobre su imagen

$$\alpha : [a,b] \longrightarrow V$$

Siempre podemos conseguir parametrizaciones invirtiendo sistemas de coordenadas como se ilustra en seguida:



La imagen de α es lo que llamamos una curva en $\mathbb{R}^n$. La longitud de la curva α se puede calcular mediante la integral

$$\text{longitud } \alpha([a, b]) = \int_a^b \sqrt{|a'(t)|} \, dt$$

Definición: Decimos que una parametrización

$$\alpha: [a, b] \rightarrow V \quad \text{preserva longitud si}$$

$$\text{long } \alpha([a, x]) = \int_a^x \sqrt{|\alpha'(t)|} \, dt = x - a \quad \forall x \in [a, b]$$

Proposición: Siempre existen parametrizaciones que preservan la longitud

Demostración: Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow V$ cualquier parametrización,

1: $\int_a^b \sqrt{|\alpha'(t)|} \, dt$ y $f: [a, b] \rightarrow [0, 1]$ dada por:

$$f(x) = \int_a^x \sqrt{|\alpha'(t)|} \, dt, \quad \text{entonces}$$

$\beta = \alpha \circ f^{-1}: [0, 1] \rightarrow V$ es una parametrización que preserva la longitud.

Cubrir los detalles de esta demostración queda como un ejercicio.

La siguiente proposición es en preparación de la demostración del siguiente teorema;

Proposición: Sean $\alpha: [a, b] \rightarrow V$; $\beta: [c, d] \rightarrow V$ dos parametrizaciones de V que preserven la longitud, entonces

1) $\text{Im } \alpha \cap \text{Im } \beta$ tiene a lo más dos componentes

Además

2) Si hay una sola componente, hay una parametrización

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow V$$

que preserve longitud y tal que $\text{Im } \gamma = \text{Im } \alpha \cup \text{Im } \beta$

3) Si hay dos componentes, entonces V es homeomorfa a S^1 .

Demostración: Sea $f: [a,b] \times [c,d] \rightarrow V \times V$ dada por

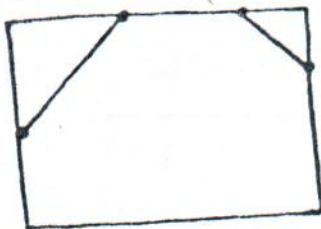
$f(x,t) = (\alpha(g), \beta(t))$. Sea $\Delta = \{(v,v) \in V \times V\}$ y $\Gamma = f^{-1}(\Delta) = \{s,t) \in [a,b] \times [c,d] \mid \alpha(s) = \beta(t)\}$. Nótese que Γ es precisamente la gráfica de la función $\beta^{-1} \circ \alpha$ y el dominio de esta es la imagen de Γ bajo la proyección en el primer factor.

Más aún, Γ puede describirse así:

- 1) Γ es cerrado en $[a,b] \times [c,d]$ porque $\Gamma = f^{-1}(\Delta)$
- 2) Γ consiste de segmentos de línea de pendiente ± 1 , ya que es la gráfica de $\beta^{-1} \circ \alpha$ y esta tiene derivada constante ± 1 en cada componente conexa de su dominio, por ser α y β parametrizaciones que preservan longitud.
- 3) Estos segmentos no pueden terminar en el interior de $[a,b] \times [c,d]$, porque Γ no es solo gráfica de $\beta^{-1} \circ \alpha$ sino también de $\alpha^{-1} \circ \beta$ y por eso la proyección de $\Gamma \cap [(a,b) \times (c,d)]$ al primer o segundo factor debe ser un abierto de $[a,b]$ ó $[c,d]$ respectivamente.

Así, puede haber a lo más dos segmentos, que es lo que dice la primera parte de la proposición.

Además, siendo dos segmentos de línea, no pueden tener pendientes distintas por la misma razón de que Γ es gráfica de ambas $\beta^{-1} \circ \alpha$ y $\alpha^{-1} \circ \beta$.

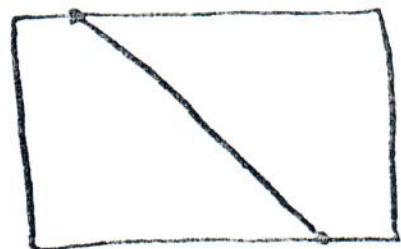
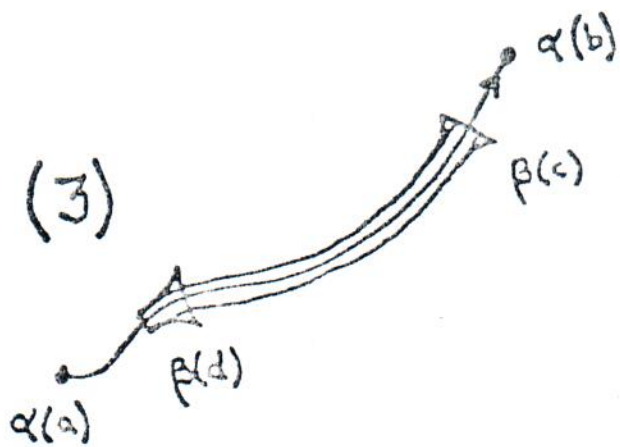
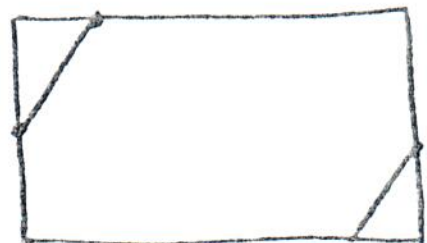
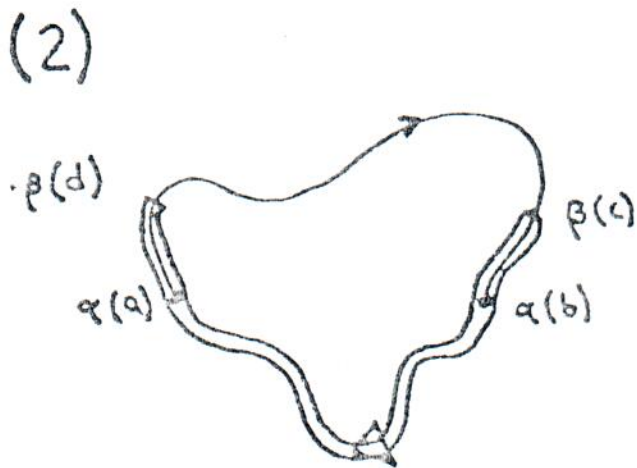
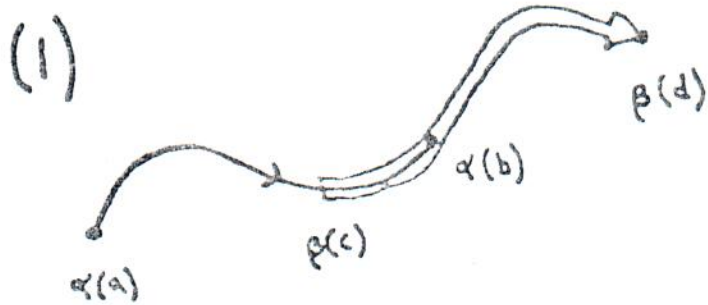


$\Gamma \cap [a,b] \times [c,d]$

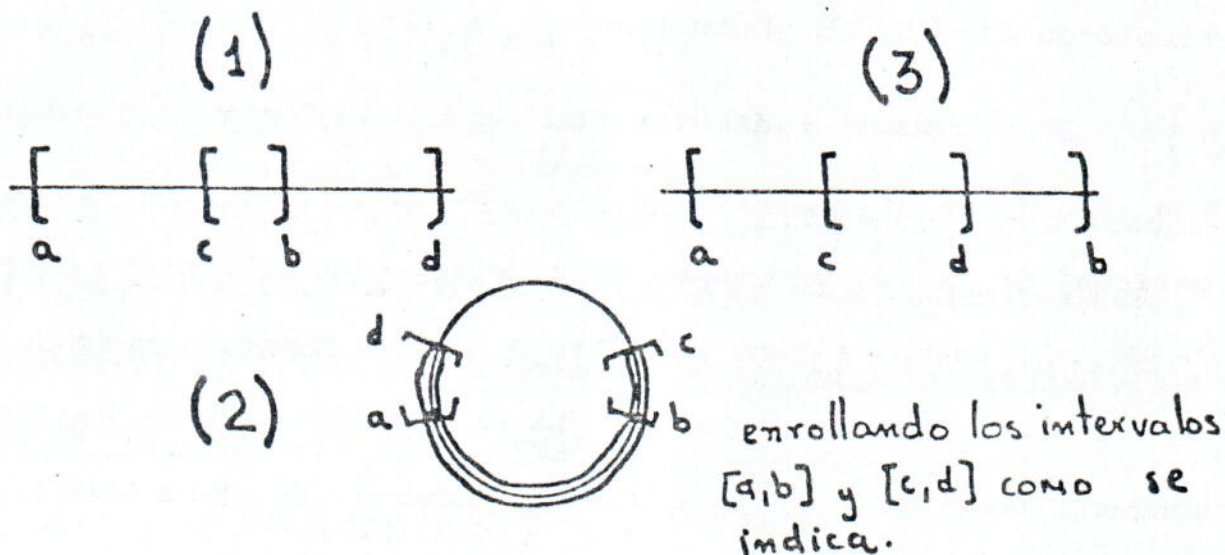


No es gráfica

En seguida damos algunas posibilidades para Γ .



Observando bien estas tres posibilidades no es difícil decidir que hacer con los intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$ para poder poner las cosas así:



Con esto damos por terminada la demostración.

La demostración del teorema de clasificación de 1-variedades ahora resulta bastante directa:

Empezamos con una parametrización cualquiera $\alpha: [a,b] \rightarrow V$ y luego tomamos otra que contenga a b , esto es $\beta: [c,d] \rightarrow V$ con $b \in [c,d]$. Si la intersección tiene dos componentes ya acabamos, la variedad es S^1 . Si tiene una sola componente, extendemos α , hasta $\alpha_1: [a^1, b^1] \rightarrow V$ y de esta forma continuamos.

Con este procedimiento, siempre podemos encontrarnos con que ó V es S^1 , ó bien podemos extender la parametrización aunque quizá el dominio de esta se extienda a una semirecta o a toda la recta. No obstante, como el conjunto de puntos de V que se alcanzan es abierto y cerrado y V es conexo, este conjunto es todo V .

5. Teoría de intersecciones modulo dos.

Sean X, W variedades y $Y \subset W$ una subvariedad de dimensión complementaria a X . Esto es

$$\dim X + \dim Y = \dim W.$$

Sea $f: X \rightarrow W$ transversal a Y , entonces $f^{-1}(Y)$ es una subvariedad de X de dimensión cero, esto es un subespacio discreto de X . Si además alguno de entre X y Y es compacto entonces $f^{-1}(Y)$ es un conjunto finito. La cardinalidad modulo dos de este conjunto no depende de la clase de homotopía de $f: X \rightarrow W$, como veremos en el siguiente teorema.

Teorema: Sea X una variedad compacta y sean f y $g: X \rightarrow W$ dos funciones transversales a $Y \subset W$ y homotópicas, entonces:

$$\# [f^{-1}(Y)] = \# [g^{-1}(Y)] \pmod{2}$$

Demostración: Sea $H: X \times I \rightarrow W$ una homotopía entre f y g .

Por el teorema de transversalidad de Thom, $\exists F: X \times I \rightarrow W$ transversal a Y y que coincide con H en $\partial(X \times I)$. En otras palabras, H es una homotopía entre f y g que es transversal a Y .

Ahora bien, $F^{-1}(Y)$ es una subvariedad con frontera de $X \times I$ de dimensión uno. Además

$$\partial F^{-1}(Y) \subset \partial(X \times I) = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$$

Como X es compacto, $\partial F^{-1}(Y)$ también lo será y por lo tanto consiste de un número finito de componentes conexas homeomorfas a S^1 o a un intervalo cerrado $[a, b]$. En todo caso el número

de componentes conexas de su frontera es par, i.e.

$$\# \partial(F^{-1}(Y)) = 0 \pmod{2}$$

Pero $\# \partial(F^{-1}(Y)) = \# f^{-1}(Y) + \# g^{-1}(Y)$

de manera que $\# f^{-1}(Y) = \# g^{-1}(Y) \pmod{2}$, que es lo que queríamos.

Definición: Sean X, Y, W , como antes y $f: X \rightarrow W$. Por el teorema de transversalidad de Thom, existe $g: X \rightarrow W$ homotópica a f y transversal a $Y \subset W$. Definimos el número de intersección módulo dos de f respecto a Y como:

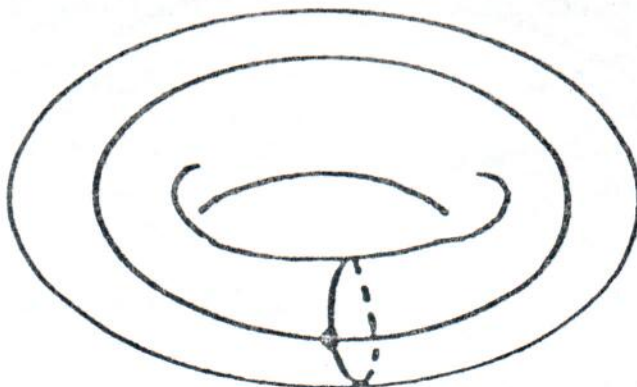
$$\#_2(f, Y) = \# g^{-1}(Y) \pmod{2}.$$

Por el teorema anterior, esta es una buena definición ya que si $g_1: X \rightarrow W$ es también homotópica a f y transversal a Y , podemos juntar las dos homotopías para dar una entre g y g_1 . De este modo vemos que:

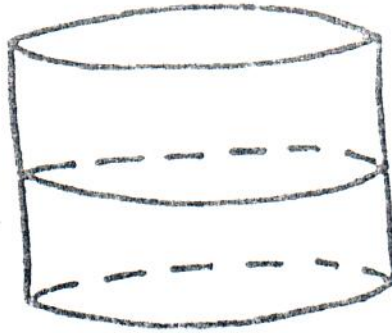
$$\# g^{-1}(Y) = \# g_1^{-1}(Y) \pmod{2}$$

Ejemplos:

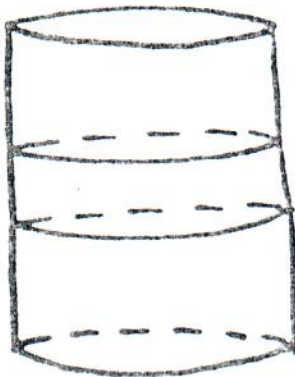
- 1) En el toro, el número de intersección mod 2 de un meridiano y un paralelo es 1.



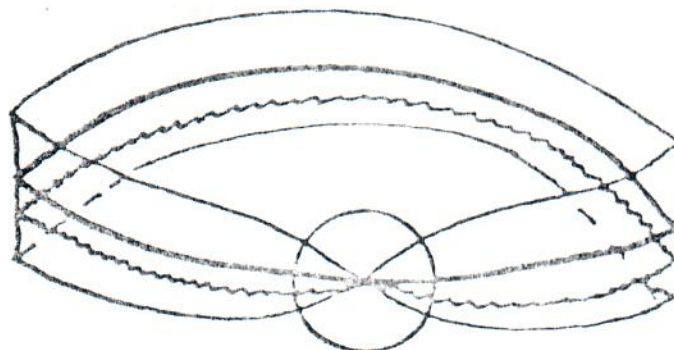
- 2) En el cilindro el número de intersección mod 2 del círculo de la figura con sí mismo es cero.



Se puede hacer transversal a sí mismo de varias maneras. Aquí mostramos tres de ellas



- 3) En la banda de Möbius, el número de intersección del círculo central consigo mismo es uno. Este se puede hacer transversal a sí mismo por ejemplo así:



enderezando se ve así:



Teorema: Supongase que X es la frontera de una variedad compacta V y que $f: X \rightarrow W$ se extiende a $F: V \rightarrow W$. Entonces

$$\#_2(f, Y) = 0$$

Demostración: Sea G homotópica a F y transversal a $Y \subset W$ y sea g la restricción de G a $X = \partial V$. Entonces, g es homotópica a f y transversal a Y , de modo que

$$\#_2(f, Y) = \#_2(g, Y)$$

Por otro lado, $G^{-1}(Y)$ es una 1-variedad compacta y por lo tanto con un número par de componentes en la frontera. Este número es precisamente el número de puntos de $g^{-1}(Y)$.

$$\text{Así} \quad \#_2(f, Y) = \# [g^{-1}(Y)] = 0 \pmod{2}.$$

Aplicaciones:

Primero definimos un invariante mod 2 para funciones $f: X \rightarrow Y$ donde $\dim X = \dim Y$, con Y conexo,

$$gr_2(f) = \#_2(f, z)$$

donde $z \in Y$ es un punto. Por definición y los resultados anteriores tenemos:

Proposición: a) Si $f, g: X \rightarrow Y$ son homotópicos, entonces

$$gr_2(f) = gr_2(g)$$

b) Si $f: X \rightarrow Y$ puede extenderse a W con $\partial W = X$,

$$\text{entonces } gr_2(f) = 0$$

Veamos ahora como usamos el grado mod 2 para funciones de variedades en $\mathbb{R}^{n+1}$.

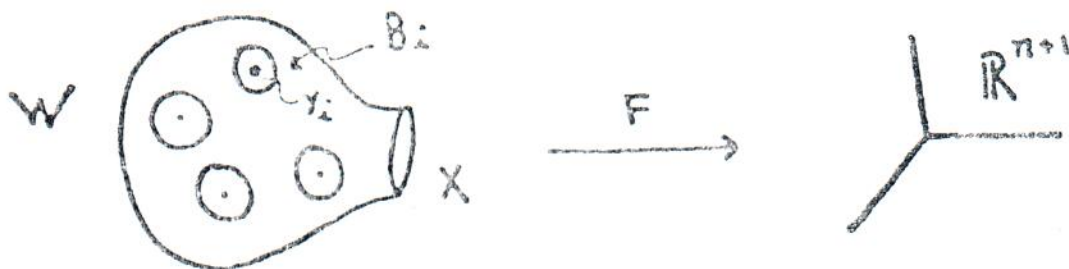
Sea $\dim X = n$ y $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ un map. Si $z \notin \text{Im } f$ definimos el número de giro de f respecto a z , $W_2(f, z)$ como $\text{gr}_2(u_z)$ donde $u_z(x) = \frac{f(x) - z}{\|f(x) - z\|}$ es la función asociada a f y z , con $u_z: X \rightarrow S^n$.

Veamos como podemos evaluar el número de giro.

Teorema: Supongamos que $X = \partial W$ y que $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ extiende a $F: W \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces si z es valor regular de F y $z \notin f(X)$, $W_2(f, z) = \#_2 F^{-1}(z)$.

Demostración: 1) Si $z \notin F(W)$, podemos extender $u_z: X \rightarrow S^n$ a $v_z: W \rightarrow S^n$, por lo que $\text{gr}_2(u_z) = 0 = W_2(f, z)$ y como $\#_2 F^{-1}(z) = 0$, el resultado vale para $z \notin F(W)$.

2) Supongamos ahora que $z \in F(W)$. Como z es valor regular de F , $F^{-1}(z) = \{y_1, \dots, y_m\}$, $y_i \in W - X$. Escogemos bolas $B_1, \dots, B_m$ con centros en y_i ajenas entre si y ajenas a X .



Sea $f_i = F|_{\partial B_i}$. Entonces:

$$W_2(f, z) = W_2(f_1, z) + \dots + W_2(f_m, z) \pmod{2}$$

En efecto, sea $Y = X \cup \partial B_1 \cup \dots \cup \partial B_m$. Entonces $F|_Y$ extiende a $W - (\text{Int } B_1 \cup \text{Int } B_2 \cup \dots \cup \text{Int } B_m) = W'$. Ahora $z \notin F(W')$, luego obtenemos por (1),

$$W_2(F|_Y, z) = 0 \quad (*)$$

Ahora es claro que si X y X' son variedades ajenas, $f: X \cup X' \rightarrow Y$ con $\dim X = \dim X' = \dim Y$ entonces $gr_2(f) = gr_2(f|_X) + gr_2(f|_{X'})$. Luego de (*) obtenemos $W_2(f, z) = W_2(f|_X, z) + \dots + W_2(f|_{X_m}, z)$.

Ahora como z es valor regular de F , $dF_{Y_i} : T_{Y_i}(W) \xrightarrow{\cong} T_z(R^{n+1})$ y existe una vecindad V_i de Y_i donde F es difeomorfismo. Podemos suponer que $B_i \subset V_i$. Entonces $F|_{\partial B_i} = f_i : \partial B_i \rightarrow R^{n+1}$ es 1-1 y también $u_z(s) = \frac{f_i(x) - z}{\|f_i(x) - z\|}$. Luego $gr_2(v_z) = 1$. Así obtenemos que $W_2(f, z) = m = \#F^{-1}(z)$, que es el resultado que queríamos obtener.

Veamos un caso en que el número de giro es no nulo.

Teorema de Borsukulam: Sea $f: S^n \rightarrow R^{n+1}$ un map antípodo, i.e. $f(-x) = -f(x)$, que no cubre al 0, i.e. $0 \notin f(S^n)$, entonces

$$W_2(f, 0) = 1.$$

Demostración: Por inducción en n . Supongamos que es válido para valores $< n$. Consideremos $S^{n-1} \rightarrow S^n$ como $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 0)$ es decir como ecuador. Sea $\bar{f}: S^n \rightarrow S^n$, $\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ y $\bar{g} = \bar{f}|_{S^{n-1}}$.

Por el teorema de Sard podemos escoger $b \in S^n$ que es valor regular para $\bar{f}$ y $\bar{g}$. Como $\bar{f}(-x) = -\bar{f}(x)$, $-b$ también es valor

regular de $\bar{f}$ y $\bar{g}$. Decir que b es valor regular de $\bar{g}$ es decir que $b \notin \bar{g}(S^{n-1})$.

Luego $-b \notin \bar{g}(S^{n-1})$, por lo que $g = f|_{S^{n-1}}$, no intersecta a la recta L_b por el origen generada por b . Ahora $\bar{f}$ es regular en b y $-b$ equivale a decir que f es transversal a L_b .

Por definición

$$W_2(f, 0) = \text{gr}_2(\bar{f}) = \#_2 \bar{f}^{-1}(b) .$$

Ahora $\# \bar{f}^{-1}(b) = \frac{1}{2} \# f^{-1}(L_b)$ por simetría.

Sea S_+^n el hemisferio norte de S^n , i.e.

$$S_+^n = \{x \in S^n | x_{n+1} \geq 0\}$$

Por simetría y como $f(S^{n-1}) \cap L_b = \emptyset$

$$\# f_+^{-1}(L_b) = \frac{1}{2} \# f^{-1}(L_b)$$

donde f_+ es $f|_{S_+^n}$, luego tenemos

$$W_2(f, 0) = \#_2 f_+^{-1}(L_b) .$$

Como $\partial S_+^n = S^{n-1}$, si consideramos $V = L_b^1$ en R^{n+1} y $\pi: R^{n+1} \rightarrow V$ la proyección, podemos considerar

$$\pi \circ g: S^{n-1} \rightarrow V$$

entonces $\pi \circ g$ es antípoda y $0 \notin \pi \circ g(S^{n-1})$, luego por inducción $W_2(\pi \circ g, 0) = 1$.

Ahora f_+ es transversal a L_b y $\pi(L_b) = 0$, por lo que

$\pi f_+: S_+^n \rightarrow V$ es transversal a 0 , luego $1 = W_2(\pi \circ g, 0) = \#_2(\pi \circ f_+)^{-1}(0)$
 $= \#_2 f_+^{-1}(L_b) = W_2(f, 0)$ y el resultado sigue.

Corolario: Si $f: S^n \rightarrow R^{n+1} - 0$ es antípodo, entonces f intersecta a toda recta por el origen al menos una vez.

Demostración: Si $f(S^n) \cap L = \emptyset$, podemos usar esta recta para ver que $W_2(f, 0) = \frac{1}{2} \#f^{-1}(L) = 0$.

Este resultado tiene una consecuencia muy bonita para demostrar existencia de soluciones a sistemas de ecuaciones no lineales.

Recordemos que una función $f: R^{n+1} \rightarrow R$ es una función impar si $f(-x) = -f(x)$.

Consideremos el sistema de ecuaciones impares:

$$(I) \quad \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

Teorema: El sistema (I) de funciones impares tiene una solución no trivial, es decir, existe $y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \neq (0, \dots, 0)$ tal que $f_1(y) = \dots = f_n(y) = 0$.

Demostración: Supongamos que no existe y con $f_1(y) = \dots = f_n(y) = 0$. Definimos $\bar{f}: S^n \rightarrow R^{n+1} - 0$ por

$$\bar{f}(x) = (f(x), 0)$$

donde $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.

Entonces $\bar{f}$ es antípoda, pero $\bar{f}$ no intersecta al eje x_{n+1} .

Esta contradicción establece el teorema.

Corolario: Sea $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua cualquiera, entonces existe un par de puntos antípodos $(y, -y)$ que tienen la misma imagen bajo g , i.e. $g(y) = g(-y)$.

Demostración: Pongamos $g_i = \pi_i \circ g$ y $f_i(x) = g_i(x) - g_i(-x)$ entonces las f_i satisfacen el teorema anterior, por lo que tienen un cero común y , y para esta se tiene $g(y) = g(-y)$.

6. Orientación de Variedades

En la sección anterior hemos estudiado la teoría de intersección modulo dos. Estas ideas se pueden refinar para conseguir una teoría de intersección entera. Para esto hace falta restringir la clase de variedades con que trabajamos y es por eso que introduciremos el concepto de variedad orientable.

Primero veamos el caso más sencillo, cuando nuestra variedad es el espacio vectorial R^n . Sean $\alpha = (v_1, \dots, v_n)$, $\beta = (w_1, \dots, w_n)$ bases de R^n y $T: R^n \rightarrow R^n$ la transformación lineal que manda v_i en w_i , $i = 1, \dots, n$.

A T le asociamos la matriz (t_{ij}) , donde t_{ij} queda determinado por la ecuación:

$$T(v_j) = t_{j1} w_1 + \dots + t_{jn} w_n$$

y esto nos permite definir una relación de equivalencia entre las bases de R^n como sigue:

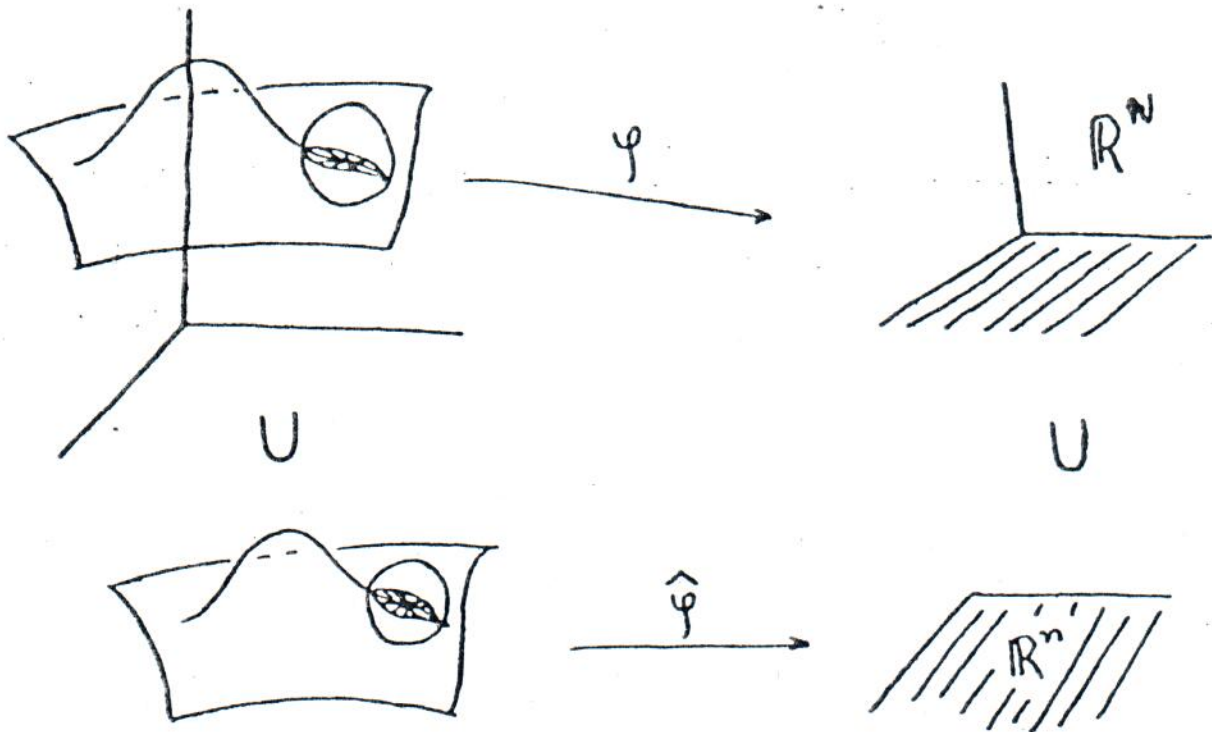
Dos bases de R^n , α y β , son equivalentes si el determinante de (t_{ij}) es positivo.

Esta relación de equivalencia tiene exactamente dos clases de equivalencia a cada una de las cuales le llamaremos una orientación de R^n .

Así pues, diremos que R^n es una variedad orientable y dar una orientación a R^n es simplemente escoger una clase de equivalencia de bases, o si se quiere una sola base como representante de toda la clase.

En $\mathbb{R}^n$ podemos tomar la 'orientación usual', es decir, escoger la base usual $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$.

Si V es una variedad de dimensión n en $\mathbb{R}^N$, cada punto tiene un sistema de coordenadas φ definido en una vecindad suya. Restringiendo el dominio del sistema de coordenadas a V conseguimos un difeomorfismo local $\hat{\varphi}$ de V en $\mathbb{R}^n$



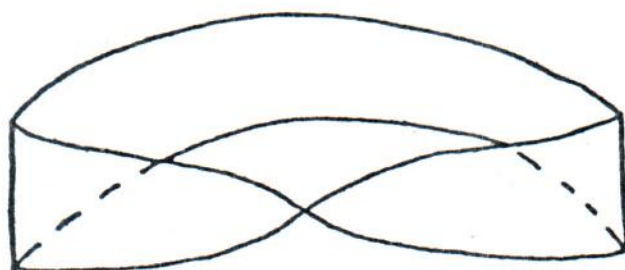
Si para cada $v \in V$ escogemos una base de $T_v V$ y en $\mathbb{R}^n$ ponemos la base usual podemos expresar a la diferencial de $\hat{\varphi}$ mediante una matriz. El signo del determinante de esta matriz no se altera si cambiamos la base de $T_v V$ dentro de una misma clase de equivalencia de bases.

Diremos que V es orientable si podemos escoger una orientación de $T_v V$ para cada $v \in V$ de tal manera que para cada sistema de coordenadas φ , el signo de determinante de la diferencial de $\hat{\varphi}$

$$D \hat{\phi}_v : T_v V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

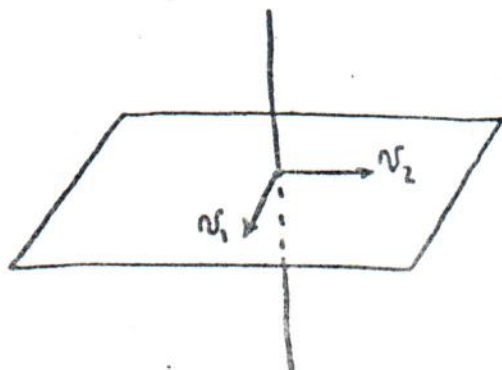
sea independiente de v . Si este signo es positivo diremos que $D \hat{\phi}$ preserva la orientación y si es negativo diremos que la cam
bia.

No toda la variedad es orientable. El ejemplo más sencillo de esto es el de la banda de Möbius.



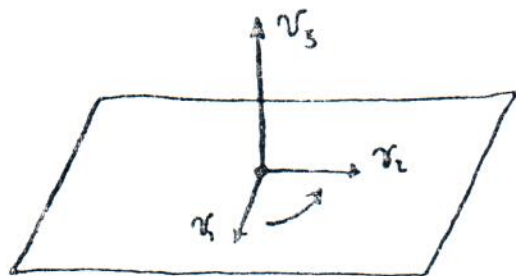
El dar una orientación al plano tangente nos permite escoger una dirección perpendicular a la superficie en cada punto, siguiendo la regla de la mano derecha o la regla del Tornillo como explicamos en seguida:

Sea $\{v_1, v_2\}$ una base ortogonal del plano tangente representante de la clase de orientación dada.

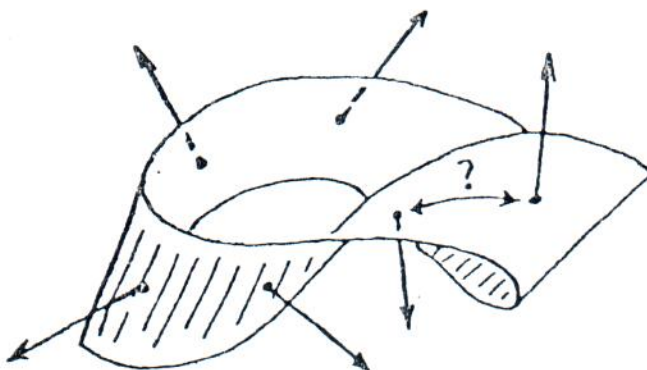


Ahora escogemos v_3 perpendicular a la superficie y en la dirección en la que entraría un tornillo al girarlo de v_1 hacia v_2

como se ilustra en seguida:



Así, si pudiéramos dar una orientación a la Banda de Möbius también podríamos poner un vector perpendicular a la superficie en cada punto, lo cual es imposible sin romper la continuidad



Si V es una variedad orientable y con frontera, entonces su frontera ∂V , también es una variedad orientable.

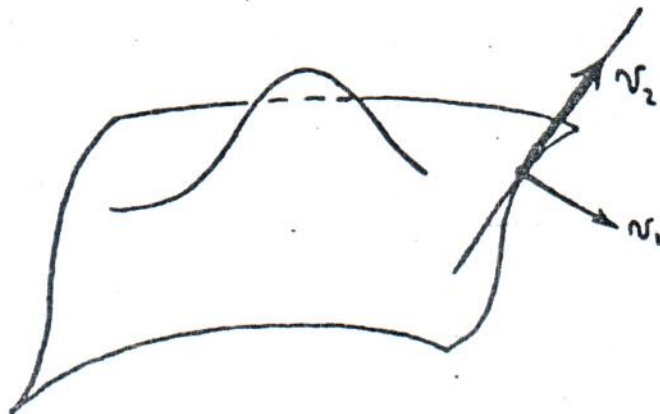
Más aún dada una orientación para V podemos inducir una para ∂V como sigue:

1) El espacio tangente a V en un punto $x \in \partial V$ puede descomponerse como suma del espacio tangente a la ∂V más en el espacio perpendicular a ∂V , que es de dimensión uno.

2) Escogemos en el espacio normal un vector v_1 apuntando hacia afuera de V y completamos a una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de $T_x V$

en la clase de equivalencia de la base que determina la orientación de V , de manera que $\{v_2, \dots, v_n\}$ sea base de $T_x \partial V$.

La clase de equivalencia de $\{v_2, \dots, v_n\}$ determina una orientación de ∂V .



7. Números de intersección orientados.

Sean V, W variedades orientadas compactas y $Y \subset W$ subvariedad orientada de W tal que

$$\dim V + \dim Y = \dim W.$$

Sea $f: V \rightarrow W$ transversal a Y . Entonces $f^{-1}(Y)$ consiste de un número finito de puntos.

Si $x \in f^{-1}(Y)$ por la condición de transversalidad tenemos que

$$f_*(T_x V) + T_{f(x)} Y = T_{f(x)} W$$

y por la condición en las dimensiones, necesariamente

$$f_*(T_x V) \cap T_{f(x)} Y = \{0\}$$

Sean $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{w_1, \dots, w_n\}$ bases de $T_x V$ y $T_{f(x)} Y$ respectivamente, que además representen las orientaciones dadas entonces $\{f_* v_1, \dots, f_* v_n, w_1, \dots, w_n\}$ es una base de $T_{f(x)} W$. La clase de

equivalencia de esta base puede o no representar la orientación dada en $T_{f(x)}W$ y de acuerdo con esto asignamos a $x \in f^{-1}(Y)$ el signo (+) ó (-).

Definición: El número de intersección de $f(V)$ con Y es el número de puntos en $f^{-1}(Y)$ contados con su signo, es decir es el número de puntos con signo (+) menos el número de puntos con signo (-) de acuerdo con la discusión anterior. Denotaremos ese número por $I(f, Y)$.

Ahora queremos extender la definición de número de intersección para cualquier función $f: V \rightarrow W$ no necesariamente transversal a Y . Para esto daremos la siguiente proposición.

Sea V una variedad orientada con frontera y L una variedad de dimensión uno orientada compacta transversal a la frontera de V con

$$\partial L = L \cap \partial V = \{x_0, x_1\}.$$

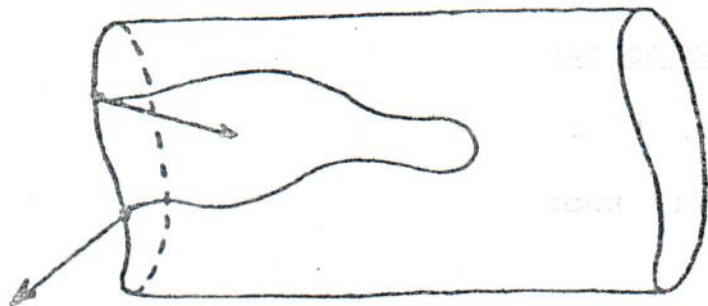
Sea $\alpha: [0, 1] \rightarrow V$ una parametrización de L que por lo anterior es transversal a ∂V .

Proposición: El número de intersección

$$I(\alpha, \partial V) = 0$$

Demostración: Si $x \in \partial V$, una base $\{v_2, \dots, v_n\}$ para $T_x \partial V$ es de orientación positiva si al añadir un vector $v_1 \in T_x V$ que apunte hacia el exterior de V la base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de $T_x V$ representa la clase de orientación dada en V .

Ahora bien, necesariamente los vectores tangentes a L en x_0 y x_1 apuntan uno hacia afuera y uno hacia adentro de V como se ilustra en seguida:



Así, necesariamente los signos de x_0 y x_1 son opuestos que es lo que queríamos probar.

Sea $f: V \rightarrow W$ con f transversal a Y como antes y supongamos que f extiende a una variedad K con frontera $\partial K = V$, es decir $F: K \rightarrow W$ es tal que $F|_{\partial K} = f$, con F transversal a Y . Entonces $F^{-1}(Y)$ es una 1-variedad orientada con frontera $\partial F^{-1}(Y) = f^{-1}(Y)$. Pero por la proposición anterior tenemos:

$$I(f, Y) = 0$$

Obtenemos así:

Teorema: Sea V frontera de una variedad orientada K y $f: V \rightarrow W$ un map de variedades orientadas. Entonces si f ex-
tiende a W , tenemos

$$I(f, Y) = 0$$

Corolario: Maps homotópicos tienen el mismo número de intersec-
ción orientada.

Demostración: Sea $F: I \times V \rightarrow W$ una homotopía entre f_0 y f_1 de V a W con F transversal a Y , entonces $I(\partial F, Y) = 0$.

Pero ahora $\partial(I \times V) = V_1 - V_0$. Luego

$$I(\partial F, Y) = f_1^{-1}(Y) - f_0^{-1}(Y)$$

por lo que $I(f, Y) = I(f_1, Y) - I(f_0, Y) = 0$ y el resultado se sigue.

Con este resultado podemos generalizar $I(f, Y)$ al caso en que f no sea transversal a Y . Basta tomar g homotópica a f con g transversal a Y , y definir $I(f, Y) = I(g, Y)$.

Cuando $\dim Y = \dim W$, y W es conexo, definimos

$$gr(f) = I(f, \{y\})$$

donde y es cualquier punto de W .

Por lo anterior $gr(f)$ está bien definido.

Ejemplo: Sea $\varphi_m: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $\varphi_m(z) = z^m$. Si restringimos

φ_m a S^1 , obtenemos $\varphi_m^*: S^1 \rightarrow S^1$ dado por $e^{i\theta} \mapsto e^{im\theta}$. Luego

$\varphi_m^{-1}(e^{im\theta}) = \{e^{\frac{i\theta + 2\pi ik}{m}}\}_{k=1}^m$ y cada uno de estos puntos tiene orien-

tación +1, por lo que

$$\text{gr}(\hat{\varphi}_m) = m$$

Como aplicación de lo anterior y de este ejemplo veamos el

Teorema Fundamental del algebra: Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio no constante, entonces f tiene una raíz, es decir existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = 0$.

Demostración: Supongamos que $f(z)$ se escribe como:

$$f(z) = a_m z^m + \dots + a_0 \quad \text{con } a_m \neq 0$$

Veamos que si $f_t(z) = a_m z^m + t(a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0)$ entonces existe R suficientemente grande tal que $f_t(z) \neq 0$ para $|z| = R$.

En efecto basta tomar $R > m \cdot \max \left\{ \left| \frac{a_i}{a_m} \right| \right\}_{i=0}^m$.

Entonces para $|z| = R$, tenemos,

$$\begin{aligned} |a_m z^m| &> t(|a_{m-1} z^{m-1}| + \dots + |a_0|) \\ &\geq t|a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0| \end{aligned}$$

luego $f_t(z) \neq 0$ para $|z| = R$. Pongamos

$$g_t(z) = \frac{f_t(z)}{|f_t(z)|} \quad \text{para } |z| = R \text{ y } 0 \leq t \leq 1$$

entonces $g_t(z)$ es una homotopía entre $g_0(z) = \frac{a_m z^m}{|a_m| R^m}$ y

$$g_1(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} \quad \text{en el círculo } |z| = R.$$

Por lo anterior, $g_0(z)$ tiene grado $m \neq 0$. Si ahora $f(z) \neq 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$, podemos extender $g_1(z)$ a la bola $|z| \leq R$ y por el teorema anterior $\text{grado}(g_1(z)) = 0$. Esta contradicción establece el resultado.

Teoría del Punto fijo de Lefschetz

Sea $f: V \rightarrow V$ un map de una variedad orientada compacta en si misma. Estamos interesados en encontrar condiciones que garanticen que f tenga un punto fijo, es decir, que exista $x \in V$ con $f(x) = x$.

Para esto asociamos a f su gráfica

$$G(f) : V \rightarrow V \times V$$

dada por $G(f)(x) = (x, f(x))$

y sea Δ la diagonal en $V \times V$, es decir $\Delta = \{(x, x) \mid x \in V\}$ entonces Δ es subvariedad de $V \times V$ con $\dim V = \dim \Delta$

$$\dim V + \dim \Delta = \dim (V \times V)$$

podemos así definir:

$$L(f) = I(G(f), \Delta)$$

y tenemos el siguiente resultado fundamental

Teorema (Lefschetz). Si $f: V \rightarrow V$ es un map con $L(f) \neq 0$, entonces f tiene un punto fijo.

Demostración: Supongamos que f no tiene un punto fijo, entonces $G(f)(V) \cap \Delta = \emptyset$ y $G(f)$ es transversal a Δ , por lo que $I(G(f), \Delta) = 0 = L(f)$.

Por definición de $L(f)$ obtenemos del teorema

Proposición: Si f y g son homotópicas entonces $L(f) = L(g)$.

Decimos que un map $f: V \rightarrow V$ es de Lefschetz si $G(f)$ es transversal a Δ .

Proposición: Todo map $f: V \rightarrow V$ es homotópico a uno que es Lefschetz.

Demostración: Podemos encontrar $S \subset \mathbb{R}^N$ tal que $F: V \times S \rightarrow V$ es submersión, entonces

$$G: V \times S \rightarrow V \times V$$

dada por $G(x, s) = (x, F(x, s))$

es submersión, es decir:

$$T_{x,s}(V \times S) \cong T_x(V) \oplus T_s(S) \rightarrow T_x(V) + T_{F(x,s)}(V)$$

es sobre, por lo que G es transversal a Δ . Así para casi todos, $G_s: V \rightarrow V \times V$ es transversal a Δ y así obtenemos la proposición.

Estudiemos ahora como se ve f en la vecindad de un punto fijo, cuando f es Lefschetz. Sea $f: V \rightarrow V$ con $x \in V$ tal que $f(x) = x$. Tenemos entonces

$$(Df)_x T_x(V) + \Delta_x \cong T_{x,x}(V \times V)$$

y por razones de dimensión, la suma es directa. Luego tenemos que $(Df)_x(u) \neq u$, es decir,, $(Df)_x$ no tiene valor propio +1. Decimos que x es un punto fijo de Lefschetz de f si $(Df)_x$ es no singular y no tiene vectores fijos.

Si x es un punto fijo de Lefschetz de f , denotamos por $L_x(f)$ el número de orientación ± 1 de (x, x) en la intersección

de $G(f)$ con Δ . Así para f un map de Lefschetz tenemos

$$L(f) = \sum_{x=f(x)} L_x(f).$$

Por lo anterior si x es punto fijo de Lefschetz de f , tenemos

$$(Df_x - I) : T_x(V) \xrightarrow{\sim} T_x(V)$$

y donde I es la matriz idéntica. Ahora tenemos:

Proposición: Para x punto fijo de Lefschetz de f , se tiene

$$L_x(f) = \text{signo } \det(Df_x - I).$$

Demostración: Sea $\beta = (v_1, \dots, v_n)$ una base orientada de $T_x(V)$ y sea $A = Df_x$. Entonces tenemos que v es la orientación de la base:

$$\{(v_1, v_1), \dots, (v_n, v_n), (v_1, Av_1), \dots, (v_n, Av_n)\}$$

que es la misma que se obtiene restando a (v_k, Av_k) el vector (v_k, v_k) , luego tenemos que ver la base

$$\{(v_1, v_1), \dots, (v_n, v_n), (0, (A - I)v_1), \dots, (0, (A - I)v_n)\}$$

como $A - I$ es isomorfismo, podemos encontrar $\{\lambda_{k_i}\}$ tales que

$$v_k = \sum \lambda_{k_i} (A - I)v_i.$$

Luego restando estas combinaciones, el problema se reduce a la orientación de la base:

$$\{v_1, \dots, v_n, (A - I)v_1, \dots, (A - I)v_n\}$$

y la orientación de esta base es:

$$(\text{signo } \beta) \cdot (\text{signo } (A - I)\beta)$$

Ejemplos: Veamos los casos típicos de puntos fijos de Lefschetz en el plano. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que tiene al origen como punto fijo de Lefschetz.

Si $A = (Df)_0$, tenemos:

$$f(x) = Ax + \varepsilon(x)$$

con $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$.

Tomando coordenadas apropiadas, $(Df)_0$ es diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

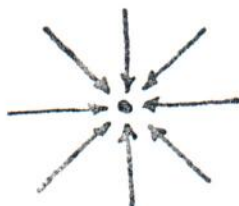
Entonces $L_0(f) = \text{signo}(\alpha_1 - 1) \cdot \text{signo}(\alpha_2 - 1)$

y tenemos tres casos:

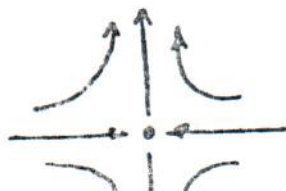
Caso I. α_1 y α_2 son mayores que 1. Entonces $L_0(f) = +1$ y f se ve como una expansión con fuente en el origen.



Caso II. α_1 y α_2 son menores que 1. Entonces $L_0(f) = +1$ y en este caso f "contrae con pozo en el origen".



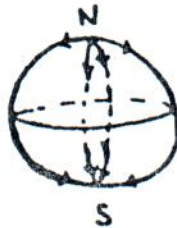
Caso III. Si $\alpha_1 < 1 < \alpha_2$, entonces $L_0(f) = -1$; "el origen es un punto de silla de montar".



Veamos otros ejemplos de como calcular la característica de Euler utilizando el teorema del punto fijo de Lefschetz. Sea

$$f: S^2 \rightarrow S^2 \text{ dado por } f(x) = \frac{x + (0, 0, -\frac{1}{2})}{\|x + (0, 0, -\frac{1}{2})\|}$$

entonces todo cae hacia el polo sur:



y así el polo norte es fuente y el polo sur es pozo.

Como f es homotópica a la identidad con:

$$f_t(x) = \frac{x + (0, 0, -\frac{t}{2})}{\|x + (0, 0, -\frac{t}{2})\|}$$

tenemos que $L(f) = \chi(S^2) = 2$ y obtenemos así:

Proposición: La característica de Euler - Poincare de S^2 es 2.

Supongamos ahora que tenemos las siguientes superficies



Podemos calcular $\chi(T_k)$ como antes. Por ejemplo cubrimos con aceite todo T_k y para $t > 0$, f_t es el flujo del aceite en T_k en el tiempo t . Entonces f_t es de Lefschetz y



N es una fuente

S es un pozo

y A_i y B_i son puntos de silla de montar

como antes obtenemos:

$$L(f_t) = X(T_k) = 2 - 2k$$

Se puede demostrar que cualquier superficie orientable compacta, sin frontera es difeomorfa a una T_k .

Proposición: La superficie T_k con k agujeros tiene característica de Euler - Poincaré:

$$X(T_k) = 2 - 2k.$$

Cuando el map f es Lefschetz, podemos calcular $L_x(f)$. Veamos ahora que si f no es Lefschetz, podemos perturbar a f tan poco como se quiera para obtener una g que si sea.

Teorema (Perturbación): Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ un map con el origen como único punto fijo, entonces existe una homotopía f_t de f tal que f_1 tiene solo puntos fijos de Lefschetz en V y además $f_t = f$ fuera de un compacto contenido en V .

Sea $\rho: V \rightarrow [0,1]$ una función tal que $\rho(V) = 1$ y $\rho(V - K) = 0$. Veremos que existen puntos $\alpha \in \mathbb{R}^n$.



con $\|\alpha\|$ arbitrariamente pequeña tal que

$$f_t(x) = f(x) - t \rho(x) \alpha$$

es una función adecuada. Si $\|\alpha\|$ es pequeña, f_t no tiene puntos fijos fuera de V . Ahora f no tiene puntos fijos en el com

punto $K \cap V$. Luego en $K \cap V$,

$$\|f(x) - x\| = c > 0$$

Supongamos que $\|\alpha\| < \frac{c}{2}$, entonces

$$\|f_t(x) - x\| \geq \|f(x) - x\| - t \rho(x) \|\alpha\| > \frac{c}{2}$$

en $K \cap V$. Fuera de K , $f_t(x) = f(x) \neq x$. Luego basta estudiar f_t en V . Sea $g(x) = f(x) - x$. Usamos el teorema de Sard para encontrar un valor regular α de $g(x)$ con $\|\alpha\| < c/2$.

Veamos ahora los puntos fijos de f_1 . Si x es punto fijo de f_1 , $x \in V$. Además $f_1 = f - \alpha$ en la vecindad de x .

Luego $(Df_1)_x = (Df)_x$. Tenemos así que x es punto fijo de Lefschetz de f_1 si y solo si $(Df)_x - I$ es no singular. Pero $f_1(x) = f(x) - \alpha = x$. Luego $g(x) = \alpha$. Pero α es valor regular de $g(x)$, i.e. $(Dg)_x$ es no singular, pero $(Dg)_x = (Df)_x - I$ y el resultado se sigue.

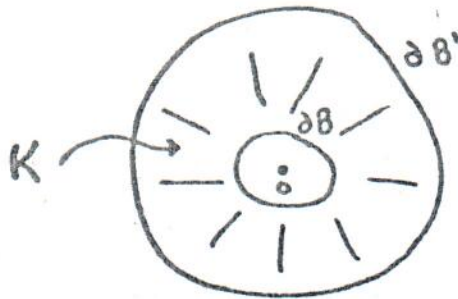
Definimos ahora otra noción de número de Lefschetz local de un map $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con 0 como único punto fijo en la vecindad de 0. Sea B una bola cerrada con centro en 0.

Definimos $F: \partial B \rightarrow S^{n-1}$ por

$$F(x) = \frac{f(x) - x}{\|f(x) - x\|}$$

y $\tilde{L}_x(f) = \text{grado de } F = \text{número de Lefschetz local de } f \text{ en } x$.

Esta definición es claramente independiente de B ya que el teorema de la frontera para el grado da:



$$\partial K = \partial B' - \partial B$$

Veamos ahora que si x es un punto fijo de Lefschetz de f , entonces

$$L_x(f) = \tilde{L}_x(f).$$

En efecto, supongamos que $x = 0$ y que $f(0) = 0$. Entonces en la vecindad del 0,

$$f(x) = Ax + \epsilon(x)$$

donde $A = (Df)_0$ y $\frac{\epsilon(x)}{\|x\|} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$.

Como 0 es punto fijo de Lefschetz, $A - I$ es isomorfismo, la imagen bajo $A - I$ de la bola $B(0,1)$ con centro en 0 y radio 1, contiene alguna bola con radio $c > 0$. Tenemos así:

$$\|(A - I)x\| \geq c\|x\| \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}^n$$

Escojemos c tal que $\frac{\|\epsilon(x)\|}{\|x\|} < \frac{c}{2}$ en $B(0, \frac{c}{2})$.

Definimos $f_t(x) = Ax + t\epsilon(x)$

entonces $\|f_t(x) - x\| \geq \|(A - I)x\| - t\|\epsilon(x)\| \geq \frac{c}{2}\|x\|$ y así f_t tiene solo a 0 como posible punto fijo en la vecindad de 0.

Si definimos $F_t: \partial B \times I \rightarrow S^{n-1}$ por

$$F_t(x) = \frac{f_t(x) - x}{\|f_t(x) - x\|}$$

obtenemos una homotopía entre F y $g(x) = (A - I)x$.

Tenemos que $\tilde{L}_0(f) = \text{gr}(F_1)$. Basta ver pues que si

$$F_0(x) = \frac{(A - I)x}{\|(A - I)x\|}, \text{ entonces:}$$

$$\text{gr}(F_0(x)) = \text{signo det}(A - I)$$

en efecto tenemos:

Lema: Si B es isomorfismo lineal de $\mathbb{R}^n$ que preserva orientación, entonces B es homotópico a I . Si B cambia orientación, entonces B es homotópico a $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$. Ahora si

$$\text{signo det}(A - I) = + \text{ entonces } (A - I) \sim I$$

y si $\text{signo det}(A - I) = -$ entonces $(A - I) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$ y obtenemos finalmente que

$$L_x(f) = \tilde{L}_x(f).$$

De lo anterior podemos obtener:

Proposición: Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que tiene a 0 como punto fijo aislado en B . Si f_1 es homotópico a f , y $f_1 = f$ fuera de un compacto contenido en el interior de B , f_1 tiene solo puntos fijos de Lefschetz, entonces

$$\tilde{L}_x(f) = \sum_{z=f_1(z)} L_z(f_1)$$

Demostración: Tenemos

$$F(z) = \frac{f(z) - z}{\|f(z) - z\|}$$

$$y \quad F_1(z) = \frac{f_1(z) - z}{\|f(z) - z\|}$$

coinciden en ∂B , luego tienen el mismo grado. Ahora si $z_1, \dots, z_n$ son los puntos fijos de f_1 y $B_1, \dots, B_n$ bolas ajenas con centros en las z_i , entonces podemos extender F_1 a $B^1 = B - \bigcup_{i=1}^N \text{Int}(B_i)$. Por lo que $\text{gr}(F_1|_{\partial B^1}) = 0$ pero $\partial B^1 = \partial B - \bigcup_{i=1}^N \partial B_i$, por lo que obtenemos:

$$\text{gr}(F_1|_{\partial B}) = \text{gr}(F_1|_{\partial B}) = \text{gr}(F_1|_{\partial B_1}) + \dots + \text{gr}(F_1|_{\partial B_N})$$

y este es el resultado, ya que $\tilde{L}_x(f) = L_x(f)$.

Extendamos ahora los resultados anteriores al caso de variedades tomando cartas locales.

Si $f: V \rightarrow V$ es un map y $x \in V$ es un punto fijo aislado de f , utilizando cartas alrededor de x ,

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & x \\ \phi \uparrow & & \downarrow \phi^{-1} \\ v & \xrightarrow{g} & v \end{array}$$

entonces g tiene al 0 como punto fijo aislado y definimos

$L_x(f) = L_0(g)$. Como tenemos

$$\begin{aligned} (Dg)_0 - I &= D \phi_0^{-1} Df_x D \phi_0^{-1} - I \\ &= D \phi_0^{-1} (Df_x - I) D \phi_0 \end{aligned}$$

$L_x(f)$ solo depende de $Df_x - I$, i.e. es independiente de las cartas. Obtenemos así:

Corolario: Si $f: X \rightarrow X$ tiene solo un número finito de puntos fijos, entonces:

$$L(f) = \sum_{f(x)=x} L_x(f)$$

Este resultado nos permite calcular el invariante global $L(f)$ en términos de los invariantes locales $L_x(f)$, que a su vez podrían haberse calculado ya bien sea a través del grado o cambiando a f por una g homotópica con todos sus puntos fijos de Lefschetz.

Campos vectoriales en esferas

Sea $M^n \subset \mathbb{R}^N$ una variedad compacta sin frontera. Un campo vectorial en M es un map diferenciable $v: M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que para todo $x \in M^n$, $v(x) \in T_x(M^n)$.

El problema de campos vectoriales es el siguiente:

¿Dado M , existe un campo vectorial v no nulo en M ? Es decir,

¿Existe $v: M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$, con $v(x) \neq 0$ para toda $x \in M^n$?

Veamos como aplicación de los resultados anteriores el siguiente

Teorema (Brouwer): S^n admite un campo vectorial no nulo si y solo si es impar.

Este teorema es consecuencia de los siguientes tres resultados

Proposición 1. Si S^n tiene un campo vectorial no nulo entonces el map antípodo $f: S^n \rightarrow S^n$ dado por $f(x) = -x$, es homotópico a la identidad.

Proposición 2. El grado del map antípodo $f: S^n \rightarrow S^n$ es $(-1)^{n+1}$.

Luego si n es par, f no es homotópico a la identidad.

Proposición 3. La función $v: S^{2k-1} \rightarrow R^{2k}$ dada por $v(x_1, \dots, x_{2k}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1})$ es un campo no nulo en la esfera S^{2k-1} .

Veamos la demostración de la proposición 1.

Sea $v: S^n \rightarrow R^{n+1}$ un campo vectorial tangente no nulo. Podemos normalizarlo para que sea unitario. Ahora recordemos que $v(x) \cdot x = 0$ es la condición para que $v(x) \in T_x(S^n)$.

Definimos:

$$F: S^n \times [0, \pi] \rightarrow R^{n+1}$$

por
$$F(x, \theta) = x \cos \theta + v(x) \sin \theta$$

entonces
$$\begin{aligned} F(x, \theta) \cdot F(x, \theta) &= (x \cos \theta + v(x) \sin \theta) \cdot (x \cos \theta + v(x) \sin \theta) \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

luego
$$F: S^n \times [0, \pi] \subset S^n$$

y
$$F(x, 0) = x$$

$$F(x, \pi) = -x.$$

Veamos ahora la demostración de la Proposición 2.

Consideremos el map $f_i: S^n \rightarrow S^n$ dado por:

$$f_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$$

Entonces es fácil ver que $\text{gr} f_1 = -1$. Además el map antípodo

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{n+1}) &= (-x_1, \dots, -x_{n+1}) \\ &= f_{n+1} \circ f_n \circ \dots \circ f_1 \end{aligned}$$

y como $\text{gr}(f \circ g) = \text{gr}(f) \cdot \text{gr}(g)$, obtenemos el resultado.

Finalmente, la proposición 3 resulta de verificar que

$$x \cdot v(x) = 0.$$

2/85

Bibliografia

- (1) V. Guillemin, A. Pollack - Differential Topology, Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
- (2) E.L. Lima - Introdução às Variedades Diferenciáveis, Instituto de Matemática da Univ. do R.G. do Sul. Pôrto Alegre, 1960.
- (3) E.L. Lima - Introdução á Topologia Diferencial, I.M.P.A., Rio de Janeiro, 1961.
- (4) J. Milnor - Topology from a Differentiable view point, Univ. of Virginia Press, 1965.
- (5) Narasimhan - Analysis on Real and Complex manifolds, North-Holland, Amsterdam, 1968.