SISTEMAS DINÁMICOS (2026)

---

§1: GENERALIDADES

Con "dinámica", pensamos en el estudio de CAMBIO, o, en describir el desarollo de algún PROCESO. Comparar con la "estatica" o "equilibrio" que pensamos como esas situaciones con una ausencia de cambio.

EJEMPLOS

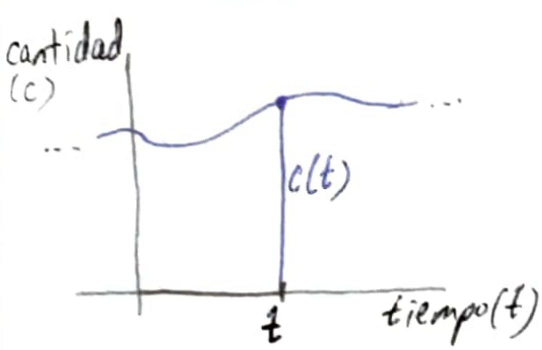
(*) el desarollo de un cantidad durante el progreso de tiempo

(*) la distribución de un cantidad sobre un objeto.

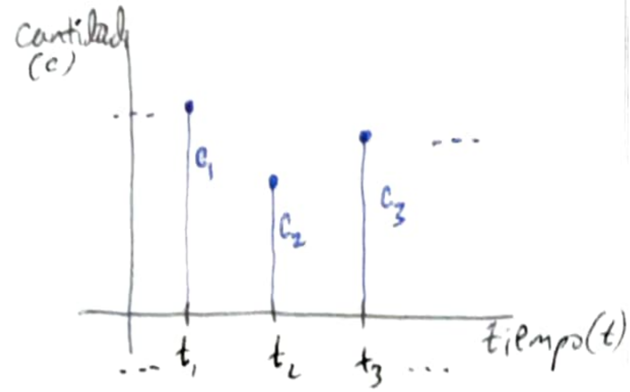
En la práctica observamos/medimos cantidades discretas. Igual, a menudo pensamos de ojetos o procesos como continuas para simplificar [ignorando tal fina estructura discreta]. Al revés a menudo aproximamos un modelo continuo con una discretización.

VISUALIZAMOS PROCESOS CON gráficas, p.ej:

CONTINUO:



DISCRETA:



Observando un PROCESO BAJO varias CIRCUNSTANCIAS, obtendríamos varias gráficas.

Básicos objectivos en aplicaciones y dinámica:

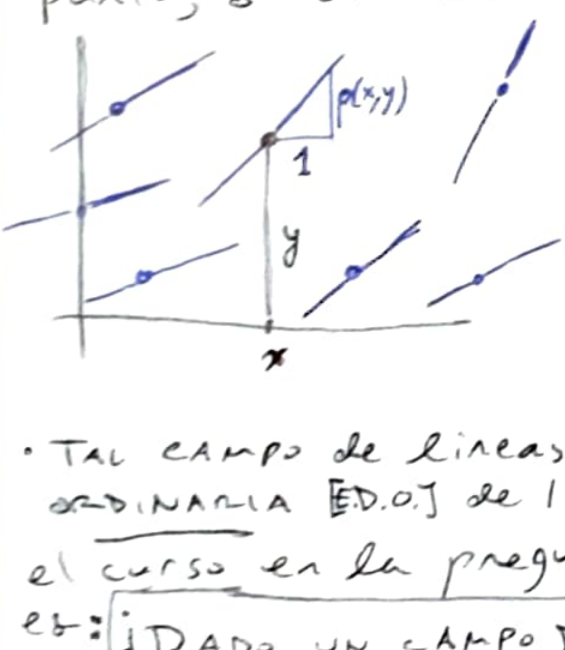
(*) dado observaciones de un proceso, a extraer PRINCIPIOS que gobiernan su desarollo.

(**) dado Principios, a predicir los posibles desarollos del procesos consistente con tal principios.

Llegamos a nuestro tema principal (ecuaciones DIFERENCIALES) en considerar que, dado unas observaciones, generalmente deducimos con mas confianza propiedades sobre las TENDENCIAS de las cantidades en lugar de sus VALORES exactas.

- Es decir que seria mas facil, en general, a notar si una gráfica es creciendo (o descreciendo) que notar (o medir) sus valores exactos.

- Geometricalmente, dar un hipotesis sobre las tendencias de algún cantidad durante un PROCESO consiste en prescribir las tasas o pendientes de las gráficas que representan su evolución. Visualmente, en cada punto algún linea por este punto, o un CAMPO de LINEAS:



o, en formulas, escribimos:

(*) $\frac{dy}{dx} = p(x,y)$ [E.D.O.]

donde la linea por el punto con coordenadas (x,y) tiene el pendiente: $p(x,y)$.

- TAL CAMPO de lineas, es un ecuación diferencial ORDINARIA [E.D.O.] de 1'er ORDEN. Enfocaremos durante el curso en la PREGUNTA/OBJETIVO (**) ARRIBA, eso es:

$\boxed{\text{¿DADO UN CAMPO DE LINEAS (*), CÓMO DESCRIBIR LAS GRÁFICAS TANGENTES A ESAS LINEAS?}}$

En describir las gráficas tangentes a un campo de líneas dados (describir las SOLUCIONES del E.D.O.) nos consideraremos las siguientes técnicas/tipos:

1º) SOLUCIONES EXPLICITAS;

p.ej. algún formula exacto; $y = s(x)$ tangente al campo de líneas: $s'(x) = p(x, s(x))$.

2º) ASINTOTICAS de SOLUCIONES;

p.ej. algún formula para valores límite de soluciones; $\lim_{x \to \infty} y(x) = A$ DONDE $y(x)$ es algún solución.

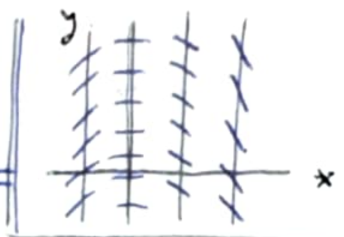
3º) ALGORITMOS/NUMERICOS para APROXIMAR SOLUCIONES;

p.ej. algún discretización del e.d.o.

Esas 3 areas son 'anchos' y sus fronteras no son claramente delimitados. Definimos que tenemos en mente más preciso en cada instante que desarollamos tal tecnica (explicita/asintotica/aproxima).

EJEMPLO: Consideramos un E.D.O. de la forma:

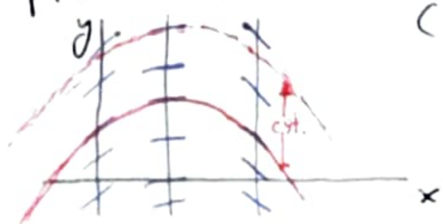
$$y' = dy/dx = f(x)$$



(donde el pendiente depende solamente de 'x')

Encontrar solución es reformulación de pregunta estandar de cálculo: ¿dado $f(x)$, que es su anti-derivada? Ya sabemos es dado por integral indefinida (determinando solución hacia adición de un constante): $y = \int f\, dx$. Tal solución es única en prescribir su valor en un instante (valor inicial)

$$\boxed{y(x) = y(0) + \int_0^x f(u)\,du}$$



EJEMPLO (CONTINUACIÓN): consideramos varias nociones de solución explicita para el e.d.o.

$$y' = f(x) \rightsquigarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\,dx .$$

En este caso la 'explicidad' de la solución depende por nuestras abilidades de determinar 'explicitamente' la anti-derivada de $f(x)$ [en general dificil].
Para hacer precisa una noción de solución 'explicita' requiere definir un clase de funciones, cuyos expresiones en terminos de tales funciones cuentan (por definición) como 'explicitas'. La noción de solución explicita es flexible. Eso es, la noción de solución explicita es flexible. Unos convenciones común:

1) Funciones elementarios en 'x' son polinomios, exponenciales, trigonometricas, y todos sus combinaciones (suma/mult./composición) y inversos. La noción mas fuerte de solución explicita es un formula por la solución con funciones elementarios. Por ejemplo:

- $y' = x \Rightarrow y = y_0 + \frac{1}{2}x^2$

- $y' = \cos x \Rightarrow y = y_0 + \sin x$

son ecuaciones con soluciones explicitas (dadó por funciones elementarios).

2) Solución hasta quadratura: consideramos el clase de funciones que incluye las funciones elementarios, las funciones que definan el E.D.O., y sus integrales indefinidas. Cuando la solución esta en este clase se considera un solución explicita hasta quadratura. Entonces cada $y' = f(x)$ tiene solución explicita hasta quadratura, pero no siempre tiene solución explicita elementario. Por ejemplo:

- $y' = e^{-x^2}$.

Ejemplo (continuación): consideramos unas propiedades asintoticas de soluciones para e.d.o.s de la forma

$$y' = f(x).$$

1) Si: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ admite un expansión en serie de poder para $x \to 0$, entonces para soluciones tenemos expansión

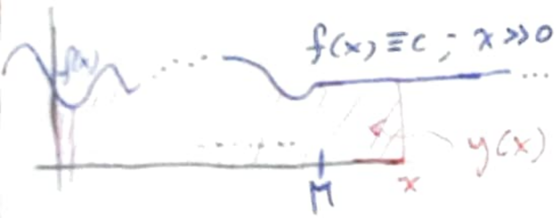
$$y(x) = y_0 + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \ldots \;;\; x \to 0.$$

2) Si: $\underline{f(x) \equiv c} = cst.$ para $x \gg 0$ sufficiamente grande, entonces para soluciones tenemos

$$\underline{y(x) = c \cdot x + cst.} \quad \text{para } x \gg 0 \text{ suff. grande}$$

[eso es $y(x) \sim c \cdot x$, mientras $x \to \infty$].

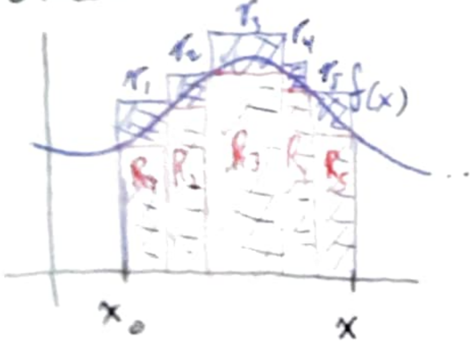
Para verlo, considera $y(x) =$ {Area bajo gráfica de f entre 0, y x} + cst.



$y(x) + cst. =$ Area bajo f entre 0, y, x.

$$= \int_0^M f\,dx + \int_M^x c\,dx = c \cdot x + cst.$$

Finalmente, unos ejemplos de algoritmos/aproximación a soluciones de $y' = f(x)$ serían cualesquiera tecnicas de aproximación para el area bajo la gráfica de f (entre 0 y x). Por ejemplo, sumas superior/inferior de Riemann:



$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 \le y(x) - \underbrace{y(x_0)}_{y_0}$$

$$\le r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5$$

—o—