

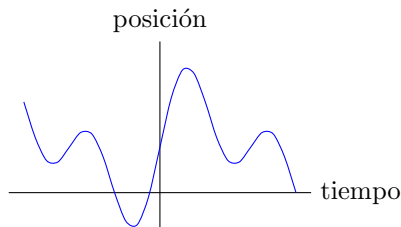
SISTEMAS DINAMICOS, PARTE 1: MOTIVACIONES

Con ‘dinamica’ pensamos en el estudio de cambios. En contraste con la ‘estatica’ (o ‘equilibrio’) que pensamos como el caso particular caracterizada por la ausencia de cambio. Es decir nos interesa en describir (y *predecir*) el desarrollo de algún proceso. En esta generalidad vemos que tal objetivo es una base central para las ciencias y aplicaciones.

EJEMPLOS.

- la situación dinámico más estándar es el desarrollo de una cantidad durante el progreso de tiempo. Podría ser una situación aislada y sencilla como graficando la posición de una bola durante el tiempo mientras rueda por un plano inclinado. Hasta algo más complicado como el precio de una taza de café durante el curso del tiempo.
- pero, no tenemos que restringir ‘dinamica’ únicamente a desarrollo o relaciones de cantidades con el tiempo (aunque es la aplicación más común). Por ejemplo predecir la distribución de alguna cantidad sobre un objeto también podemos incluir. Por ejemplo como graficando las tensiones en una barra rígida en reacción a como dependen por unas fuerzas aplicadas en sus terminos.

Tipicamente describimos un proceso cuantitativamente, es decir con mediciones de cantidades que capturan las propiedades de interés. Describir o predecir los procesos consiste en describir relaciones entre tales cantidades. Más preciso para N -cantidades como números reales $(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N$ buscamos en precisar que son los subconjuntos $A \subset \mathbf{R}^N$ en que los valores de las cantidades ocurren durante tal proceso. Por ejemplo si nos interesa relaciones entre dos cantidades buscaremos unas particulares curvas planas en que las cantidades asientan durante su desarrollo, por ejemplo gráficas de la posición de algún objeto con respecto al tiempo:



En este tema el juego principal consiste en perseguir el siguiente ciclo de desafíos:

1. Dado observaciones de un proceso, a extraer principios que gobiernan su desarrollo.
2. Dado principios, a deducir (predecir) los posibles desarrollos de tales procesos.

El 1'er objetivo consiste en la ciencia experimental (coleccionar observaciones confiables) e incluye en parte la estadística (interpretar tales observaciones y llegar a un conclusion). En este curso nuestro enfoque sería en el 2'do objetivo.

Mas preciso, el principio base de nuestra tema surge del hecho que *generalmente observamos con mas confianza las tendencias de varias cantidades que sus valores exactos*. Por ejemplo podemos afirmar sin prisa que la altura de una bola que dejamos caer esta decreciendo, mientras pedir sus alturas exactos va a costar estudios mas detallados. Similarmente en lugar de medir una poblacion (grande) con exactitud, es mas facil aceptar el postulado que alguna poblacion va a crecer con mas rapidez lo mas grande que esta actualmente (pero...debe este postulado siempre cumplirse?). Debido a este hecho, un gran parte de procesos en aplicaciones estan modelados con *ecuaciones diferenciales*. Estas son ecuaciones que restringen varias derivadas ('tasas' o 'tendencias' o 'pendiente') de unas cantidades (variables).

EL OBJETIVO CENTRAL EN ECUACIONES DIFERENCIALES ESTA LA SIGUIENTE PREGUNTA ANALITICAL: DADO RELACIONES ENTRE UNAS VARIABLES Y SUS DERIVADAS A DESCRIBIR LAS FUNCIONES DE TALES VARIABLES CUYAS DERIVADAS SATISFACEN DICHAS RELACIONES.

EJEMPLOS.

- $dy/dx = -1, dy/dx = y, dy/dx = p(x, y)$
- $f(x, y, dy/dx) = 0$
- $x \frac{\partial z}{\partial y} = y \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}), \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y, z), \\ \frac{\partial z}{\partial y} = g(x, y, z). \end{cases}$
- $f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0$
- ...etc...

La tema de ecuaciones diferenciales esta enorme y en este curso solo empezamos con las primeras etapas. A saber *no* vamos a preocupar de donde vienen estas ecuaciones diferenciales (o en que aplicacion estan modelando), mejor, tales preguntas vas a aprender de los expertos en su area de enfoque (ingenieros, economistas, ...etc.). Mas bien vamos a enfocar en la central pregunta analitica arriba. Veremos que esta pregunta, aun en sus situaciones mas 'sencillas' no esta tan facil (por esto se requiere su propio curso!).

Remark (comentario historical). *Ecuaciones diferenciales parecen simultaneamente con el cálculo. Uno podria decir que el cálculo avanza mas por el impulso que recibe con el proposito de resolver ecuaciones diferenciales. A saber la ecuacion de Newton en que se base la mecanica clásica: $f = ma$, 'fuerza es masa por aceleracion', lo que es un particular (sistema) de ecuaciones diferenciales ordinarias (de 2'da orden)*

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, d\mathbf{x}/dt) = m d^2 \mathbf{x} / dt^2.$$

Entonces resolver ecuaciones diferenciales se convierte en una vidente ('sooth-sayer') en que predices el futuro. No es sorprendente entonces que muchos han trabajado en la tema de ecuaciones diferenciales.

- *Una cuotacion famoso de Laplace captura la situación en manera mas poetical:*

“Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux.” – *P.S. Laplace.*

- *Hay un cuento relevante en la corespondencia (cartas) entre Leibniz y Newton sobre 'el problema inverso de tangentes'. En el cálculo sabemos que determinar tangentes de una curva es un proceso directo: calculamos las derivadas. Al contrario encontrar anti-derivadas (integrar) no es tan facil. Con el problema inverso de tangentes refieren al siguiente tema relacionado de integración: prescribe lineas sobre el plano y preguntas cuales curvas planar admiten estas lineas prescritas para sus tangentes? Esto es la descripcion geometrical de nuestro primer tema: buscar soluciones a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.*

Curiosamente en su corespondencia con Leibniz sobre la tema, Newton sentio tan importante tal problema que se esconde unas respuestas en las siguientes anagramas:

“6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux ...
5accdae10effh11i4l3m9n6oqqr8s11t9y3x:
11ab3cdd10eaeg10ill4m7n6o3p3q6r5s11t8vx,
3acae4egh5i4l4m5n8oq4r3s6t4v, aaddaececeiijmmnnoopr rrrssssttuu.”
–*I. Newton.*

Según V.I. Arnold, se resume el anagrama en lenguaje moderna como: “es util resolver ecuaciones diferenciales.”¹ Bromas aparte, el anagrama delinie el método que Newton habia usado para resolver estes problemas, a saber el método de series (que veremos, esperamos menos cripticamente, durante el curso).

¹En la introduccion de su libro *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Tambien ver el siguiente enlace.