§2: Teorema De Comparición

Aceptando que, en general, a resolver un e.d.o. explicitamente no es practical (o posible!), resultados sobre aproximación de soluciones tienen un gran valor. Aquí daremos un ejemplo de tal resultado que esta en un clase de teoremas llamados "teoremas de comparición". A saber uno considera condiciones que permita comparar soluciones de dos ecuaciones diferenciales, con la idea de que podemos comparar las soluciones a un e.d.o. "sencilla" que entendemos con las soluciones de un e.d.o. "complicado" que nos gustaremos entender.

Teorema: Dado $p, P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continuos con

$$p(x,y) \leq P(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

entonces, si $y = s(x)$, y, $y = S(x)$ son soluciones a $y' = p(x,y)$, y, $y' = P(x,y)$ resp. con

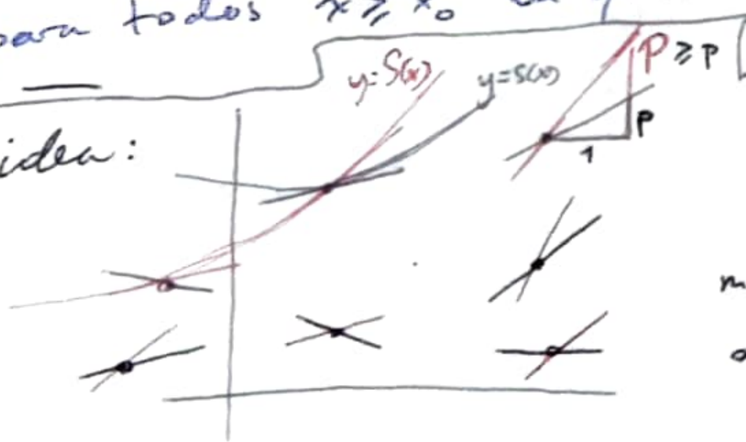
$$s(x_0) \leq S(x_0)$$

resulta que tenemos:

$$s(x) \leq S(x)$$

para todos $x \geq x_0$ en que las soluciones son definidas

idea:

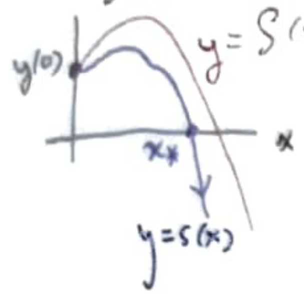


soluciones á $dy/dx = P(x,y)$ crecen mas rapido a los de $dy/dx = p(x,y) \leq P(x,y)$.

Ejemplo: $\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 - y^2 = p(x,y) \leq 1 - x^2 = P(x)$

$\Rightarrow y = s(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + y(0)$ para $x \geq 0$ en que $s(x)$ es definido.

Entonces, si $y(0) > 0$, sería algún $x_* > 0$ en que $s(x_*) = 0$:



demonstración: Ponemos $\Delta(x) := S(x) - s(x)$.

por asumpción: 1°) $S(x_0) \geq s(x_0) \Leftrightarrow \Delta(x_0) \geq 0$

2°) $S(x), s(x)$ soluciones a $y' = P$, $y' = p$

$\Rightarrow S, s$ diferenciable (y continuo)

$\Rightarrow \Delta$ diferenciable (y continuo).

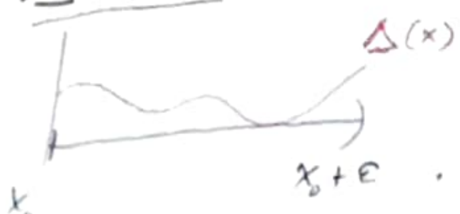
entonces si $\Delta(x_0) > 0$, por continuidad, tenemos $\Delta(x) > 0$ en algún intervalo $[x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Igual, si $\Delta(x_0) = 0$, tenemos: $y_0 = S(x_0) = s(x_0)$, y:

$$\Delta'(x_0) = P(x_0, y_0) - p(x_0, y_0) \geq 0$$

y Δ está creciendo en x_0. En particular tenemos $\Delta(x) \geq \Delta(x_0) = 0$ para x en algún intervalo $[x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Entonces en cualquier caso tenemos: $\Delta(x) \geq 0$ para x en algún intervalo $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon)$ (para algún $\varepsilon > 0$).



También hemos visto si $\Delta(x_*) = 0$ para algún x_* en el dominio de Δ, entonces

$\Delta(x) \geq 0$ para x en algún intervalo $[x_*, x_* + \varepsilon_*)$ (algún $\varepsilon_* > 0$).

Tenemos nuestro teorema en suponer (por contradicción) que hay algún $x_1 > x_0$ en el dominio de Δ tal que $\Delta(x_1) < 0$. Entonces tenemos un

$$x_* = \sup\{x \in [x_0, x_1] : \Delta(x) = 0\} \in (x_0, x_1)$$

con $\Delta(x_*) = 0$, y $\Delta(x) < 0$ para $x \in (x_*, x_1)$.

Pero esta contradice que tenemos $\Delta(x) \geq 0$ para algún intervalo $x \in [x_*, x_* + \varepsilon_*)$.

Este contradicción establece que $\Delta(x) \geq 0$ ($S(x) \geq s(x)$) para todos $x \geq x_0$ en el dominio de definición de $\Delta(x)$. $\square$

La misma demonstración establece que:

$$\boxed{s(x) \geq S(x)}$$

para todos $x \leq x_0$ en el dominio de definición de las soluciones cuando:

$$\boxed{s(x_0) \geq S(x_0)} \text{ y } \boxed{p(x,y) \leq P(x,y)}$$

En combinar este último comentario con la teorema arriba tenemos:

Corolario: Dado soluciones $y = s(x)$; $y = S(x)$ a $y' = p(x,y)$; $y' = P(x,y)$ resp. donde $p(x,y)$ y $P(x,y)$ son continuos con:

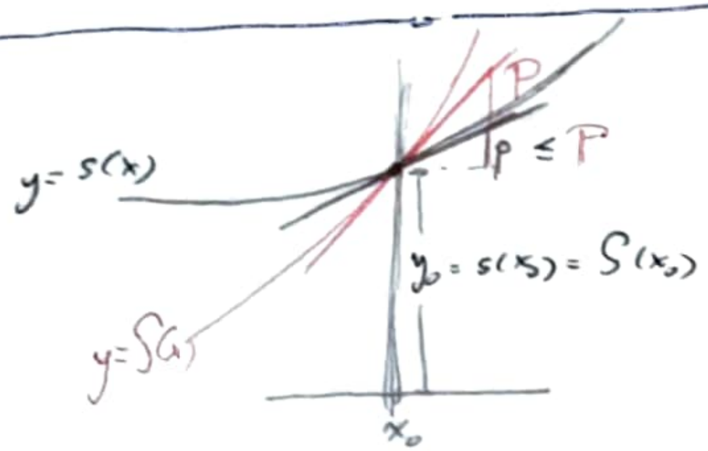
$$\boxed{p(x,y) \leq P(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$$

y $\boxed{s(x_0) = S(x_0)}$

entonces tenemos:

$$\begin{cases} s(x) \leq S(x); & x \geq x_0 \\ s(x) \geq S(x); & x \leq x_0 \end{cases}$$

todos x en que las soluciones son definidas.



Ejemplo: $dy/dx = \sin(xy) \in [-1,1]$ tiene soluciones con $y(0) - x \leq y(x) \leq y(0) + x$: