

SISTEMAS DINAMICOS, PARTE 2: E.D.O. 1'ER ORDEN

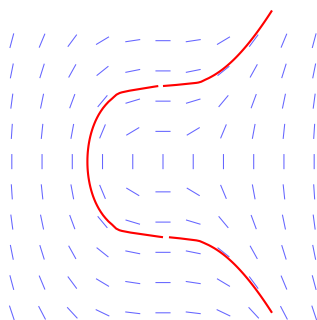
Aqui veremos basicas definiciones y unas primeros técnicas para buscar formulas explicitas (hasta quadraturas $\equiv$ calcular anti-derivadas) de soluciones a una ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.) 1'er orden.

Contents

1	campos de lineas y una e.d.o. 1'er orden	2
2	forma normal, definiciones	3
3	e.d.o. seperables	5
A	Que significa resolver un e.d.o.? (optativa)	6
B	Teoremas de comparación (optativa)	6

1 campos de líneas y una e.d.o. 1'er orden

Una e.d.o. 1'er orden es geoméricamente un campo de líneas sobre el plano y las soluciones (o curvas integral) son las curvas planar (regular y conexo) que son tangente a tal campo de líneas:



Remark. Recordamos: analíticamente escribimos la ecuación de una línea en varias formas común:

- $y = px + y_o$ para una línea no-vertical (con pendiente p),
- $x = qy + x_o$ para una línea no-horizontal,
- $ax + by = c$ en forma simétrica (la dirección $(a, b) \neq (0, 0)$ es normal a la línea).

En fórmulas describimos un campo de líneas sobre el plano con una expresión:

$$a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

significando que en un punto $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ tenemos la línea que contiene el punto (x_o, y_o) con normal dirigido por el vector $(a(x_o, y_o), b(x_o, y_o))$. La línea está bien definida en los puntos *regular* donde $a(x, y) \neq 0$ ó $b(x, y) \neq 0$. Los puntos (x_*, y_*) donde $a(x_*, y_*) = 0$ y $b(x_*, y_*) = 0$ son puntos *singular* del campo (no hay una línea determinada en tales puntos).

Si no mencionamos al contrario generalmente asumimos que los coeficientes $a(x, y), b(x, y)$ en (1) son funciones suaves (o a veces analíticas) sobre el plano y que sus puntos singular (si existen) son aislados.

EJEMPLOS.

- $-ydx + xdy = 0$. El origen $(0, 0)$ es un punto singular. En un punto $(x, y) \neq (0, 0)$ tenemos la línea con normal $(-y, x)$, lo que es la línea que pasa por (x, y) y $(0, 0)$. Las curvas integrales son las líneas por el origen.
- $x dx + y dy = 0$. El origen $(0, 0)$ es de nuevo un punto singular. Las curvas integrales son círculos centrados por el origen.

Remark. Las dos expresiones: $adx + bdy = 0$, ó, $\mu adx + \mu bdy = 0$ para cualquier $\mu(x, y) \neq 0$ presentan el mismo campo de líneas (el factor μ no efecta las direcciones normal de las líneas). En los puntos donde $b(x, y) \neq 0$ el campo de líneas (1) no es vertical y podemos describirlo por los pendientes:

$$p(x, y) = -\frac{a(x, y)}{b(x, y)} = dy/dx = y'.$$

Una solución sería una gráfica $y = f(x)$ sobre el eje x tal que $f'(x) = p(x, f(x))$. Similarmente cuando $a(x, y) \neq 0$ el campo de líneas (1) no es horizontal y podemos describirlo por los pendientes:

$$q(x, y) = -\frac{b(x, y)}{a(x, y)} = dx/dy = x'.$$

Una solución sería una gráfica $x = g(y)$ sobre el eje y tal que $g'(y) = q(g(y), y)$.

2 forma normal, definiciones

El forma normal para una e.d.o. 1'er orden consiste en coordenadas donde lo vemos como líneas no-verticales. Es decir, describiendo las líneas no-verticales por sus pendiente, podemos escribir tales e.d.o. como:

$$y' = dy/dx = p(x, y) \tag{2}$$

donde $\mathbb{R}^2 \dashrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto p(x, y)$ prescribe el pendiente de la línea por (x, y) .

Definition 1. Una solución particular a una e.d.o. 1'er orden en forma normal (2) es una función $x \mapsto s(x)$, definido sobre algún intervalo $x \in (x_0, x_1)$ tal que

$$s'(x) = p(x, s(x))$$

se satisface idénticamente sobre el intervalo $x \in (x_0, x_1)$.

Es decir una solución es una función cuyo gráfica $y = s(x)$ (sobre el eje- x) esta tangente al campo de líneas correspondiente al (2).

EJEMPLOS.

- $y = s(x) = cx$ para $c = cst.$ es una solución de $y' = y/x$ (que pasa cuando $x = 0$?).
- $y = s(x) = \sin x$ es una solución de $y' = \sqrt{1 - y^2}$ (sobre cuales intervalos?).
- soluciones de $y' = f(x)$ conocen de cálculo: calcula la anti-derivada! Es decir la daintegral indefinida: $y = \int f(x)dx + cst.$ son todos soluciones.
- soluciones de $y' = g(y)$ son (cuando $g \neq 0$) por integral indefinida $x = \int \frac{dy}{g(y)} + cst.$ (que pasa cuando $g(y_*) = 0$?)

Vemos que en ‘resolver’ un e.d.o. hay unos puntos adicionales para prestar atención. Primer: un e.d.o. 1’er orden en el plano no tiene una sola solución, sino una familia de soluciones (que dependen por un parámetro). Podemos precisar una solución particular al dado e.d.o. en precisar un punto particular en que tal solución debe pasar (esto llamamos prescribir un *condición inicial* para tal solución particular). Segundo: el intervalo en que alguna solución particular está definido como una gráfica no tiene que ser todo el eje- x . Entonces también debemos describir el intervalo (conexo) más grande (maximal) en que tal solución está definida. Formalmente:

Definition 2. Una solución particular al e.d.o. (1) con condición inicial $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ es una curva integral que contiene el punto (x_o, y_o) . Para una e.d.o. en forma normal (2) esto es una solución $y = s(x)$ tal que $s(x_o) = y_o$, que se denota comúnmente como $y(x_o) = y_o$ para brevedad.

Definition 3. El intervalo maximal de existencia de una solución $y = s(x)$ con condición inicial $s(x_o) = y_o$ a una e.d.o. en forma normal (2) es el unión de todos los intervalos conexos que contienen x_o y sobre que $s(x)$ está bien definido.

Una resultado fundamental sobre intervalos maximal de existencia está la siguiente (no demostraremos ahora):

Theorem 1 (extension theorem). Considera una e.d.o. 1’er orden en forma normal (2) donde $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto p(x, y)$ está continuo y definido sobre todo el plano. Entonces:

1. El intervalo maximal de existencia de cualquier solución está un intervalo abierto.
2. Si el intervalo maximal de existencia de alguna solución $s(x)$ está finita, digamos (x_-, x_+) para $x_+ < \infty$, entonces $s(x) \rightarrow \pm\infty$ mientras $x \nearrow x_+$.

En breve, para una e.d.o. continuo y definido (es decir sin puntos singular) sobre todo el plano, las soluciones siempre pueden extender si no escapan al infinito.

EJEMPLOS.

- $dy/dx = y^2$. La solución particular con condición inicial (x_o, y_o) está $y = \frac{y_o}{1+y_o(x_o-x)}$. Cuando $y_o > 0$ el intervalo maximal de existencia está $(-\infty, x_o + \frac{1}{y_o})$. Cuando $y_o = 0$ la solución está $y = 0$ definido sobre todo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Cuando $y_o < 0$, el intervalo maximal de existencia está $(x_o + \frac{1}{y_o}, \infty)$.
- $dy/dx = \sqrt{|y|}$. Tenemos soluciones para cualesquieras concatenaciones de los partes crecientes de parábolas $y = \pm(c-x)^2$ y segmentos del eje- x .
- $dy/dx = (y-a)(y-b)(y-c)$ donde $a < b < c$ son constantes. Tenemos soluciones ‘obvios’ de equilibrio: $y = a, b, c$. Una fórmula explícita involucra usar fracciones parciales para calcular $\int \frac{dy}{(y-a)(y-b)(y-c)} = x + cst$. Si no deseamos información tan preciso podemos dibujar la forma de las soluciones en ver el signo del pendiente entre estas soluciones de equilibrio.

3 e.d.o. seperables

De cálculo tenemos un proceso para encontrar soluciones al e.d.o. de las siguientes formas particular:

- $y' = dy/dx = f(x) \implies y = \int f(x)dx + cst.$
- $y' = dy/dx = g(y) \implies x = \int \frac{dy}{g(y)} + cst.$

Combinación de estos dos tipos tenemos el clase de e.d.o. seperables:

Theorem 2. Para un campo de líneas (1) en la forma particular:

$$A(x)dx + B(y)dy = 0$$

tenemos sus soluciones como curvas implícitas (conjuntos niveles) hasta quadraturas: $\int A(x) dx + \int B(y) dy = cst.$

Proof. Sea (x_o, y_o) algún punto en el plano y poner $\varphi(x, y) = \int_{x_o}^x A(u)du + \int_{y_o}^y B(v)dv$ que esta definido, al menos para (x, y) alrededor (x_o, y_o) . Afirmamos que un conjunto nivel de φ define una curva integral de nuestro campo lineal. De hecho, recordamos que las líneas normal de algun conjunto nivel $\varphi(x, y) = cst.$ estan dirigido por $(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y})|_{(x, y)} = (A(x), B(y))$ como deseamos. $\square$

Remark. Alternativamente, la forma particular separable en forma normal parece como:

$$y' = f(x)g(y)$$

con soluciones hasta quadraturas $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + cst.$ y mas tipicamente trabajamos con esta forma.

EJEMPLOS.

- $x dx + y dy = 0$, entonces las soluciones son conjuntos niveles: $cst. = \int x dx + \int y dy = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$, es decir circulos con centros por el origen (como ya sabiamos).
- $y dx + x dy = 0$, dividiendo por xy tenemos $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \implies cst. = \log x + \log y = \log(xy) \implies xy = cst.$
- $dy/dx = y/x \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + cst. \implies \log y = \log x + cst. \implies y/x = cst.$
- $dy/dx = e^{y-x} \implies \int e^{-y} dy = \int e^{-x} dx + cst. \implies e^{-y} = e^{-x} + cst.$

Notar: si requerimos soluciones particular, tenemos que precisar el valor del constante de integracion (para que la curva si pasa por el punto requerido). Si queremos analizar la curva como una gráfica (sobre eje- x) tendremos que despejar para y como funcion de x y determinar el intervalo maximal en que tal expresion esta definido alrededor nuestro valor inicial.

A Que significa resolver un e.d.o.? (optativa)

La noción que una ecuación es ‘resoluble explícitamente’ depende de la clase de funciones con que deseamos representar la solución. Por ejemplo para una e.d.o. en forma normal $y' = p(x, y)$ en el plano con coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tenemos:

- funciones elementales en las variables x, y : los polinomios, trigonométricas, exponenciales igual que todas las funciones obtenida por un número finito de sus inversos/composiciones/operaciones algebraicas.
- funciones hasta cuadraturas de los que definan el e.d.o.: añadimos a las funciones elementales la función $p(x, y)$ igual que todas las funciones obtenida por un número finito de sus inversos/composiciones/operaciones algebraicas/derivadas/anti-derivadas.

el primer clase es más estricta (la mayoría de e.d.o. no admiten soluciones que son expresible en funciones elementales, p.ej. $dy/dx = e^{-x^2}$) y generalmente la segunda clase de ‘soluciones hasta cuadraturas’ es que uno significa cuando hablamos de soluciones explícitas a algún e.d.o.

Resulta que un e.d.o. ‘típico’ no tiene soluciones explícitas, ni hasta cuadraturas!

Preguntas como: ¿dado un e.d.o. $y' = p(x, y)$ como puedo decidir si existe una solución explícita en funciones elementales? ¿en funciones hasta cuadraturas? comienzan una gran tema de ‘integrabilidad’ (análogos de la teoría de Galois¹ para e.d.o.). Ver p.ej. la referencia:

- H. Stephani. *Differential equations: their solution using symmetries*. Cambridge University Press, 1989.

para una introducción a esta tema (las motivaciones principales para grupos y álgebras de Lie). También notamos que estas preguntas no son solamente interesantes teóricamente, pero son aplicados en sistemas de álgebra computacional (cuando pides a Maple o Mathematica resolver alguna e.d.o. se aplican estas teorías para decidir si existen fórmulas explícitas, y además para encontrarlos cuando existen).

B Teoremas de comparación (optativa)

Encontrar soluciones explícitas (hasta cuadraturas) a un e.d.o. dado es en general difícil (sino imposible). Un herramienta valorable para entender soluciones

¹Tal vez has escuchado que polinomios de grado 1,2,3,4 tienen fórmulas generales para sus raíces en términos de sus coeficientes con operaciones elementales (adición/multiplicación/inversos/radicales). Pero para polinomios de grado 5 o más ya no existen tales fórmulas generales para las raíces.

de e.d.o. sin la necesidad de resolverlos explícitamente están ‘teoremas de comparación’. No hay *un* teorema de comparación, más bien hay una variedad de tales teoremas que sientan bajo una tema común. A saber la idea general es decir cuáles relaciones entre unos e.d.o.’s nos permite concluir relaciones entre sus soluciones. El arte de usar tales teoremas consiste en encontrar manera para comparar algún e.d.o. complicado con algún e.d.o. entendido. Para e.d.o. 1’er orden consideramos dos e.d.o. en forma normal:

$$dy/dx = p(x, y), \quad dy/dx = P(x, y)$$

y tenemos:

Theorem 3. *Considere dos campos de líneas no vertical sobre el plano con pendientes dado por funciones continuas $p, P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$p(x, y) \leq P(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces para $y = s(x), y = S(x)$ soluciones a tales e.d.o. ($s'(x) = p(x, s(x)), y, S'(x) = P(x, S(x))$) tenemos:

1. *si $s(x_o) \leq S(x_o)$ entonces $s(x) \leq S(x)$ para todos $x \geq x_o$ en que las soluciones son definidos,*
2. *si $s(x_o) \geq S(x_o)$ entonces $s(x) \geq S(x)$ para todos $x \leq x_o$ en que las soluciones son definidos.*

Corollary. *En la misma situación como en la teorema anterior y soluciones $y = s(x), y = S(x)$ con misma condición inicial $s(x_o) = S(x_o)$, entonces:*

$$\begin{cases} s(x) \leq S(x), & x \geq x_o \\ s(x) \geq S(x), & x \leq x_o \end{cases}$$

para todos x en que las soluciones son definidos.

Proof. Suponer que $s(x_o) \leq S(x_o)$ (el caso cuando $s(x_o) \geq S(x_o)$ se demuestra en la misma manera). Ponemos $\Delta(x) = S(x) - s(x)$. Queremos demostrar que $\Delta(x) \geq 0$ para todos $x \geq x_o$ en que S, s son definidos. Notar:

- (i) $S(x_o) \geq s(x_o) \implies \Delta(x_o) \geq 0$,
- (ii) S, s siendo soluciones son diferenciables (y continuos) entonces también Δ es diferenciable (y continuo).
- (iii) Si $\Delta(x_*) = 0$ algún $x_* \geq x_o \implies S(x_*) = s(x_*) =: y_* \implies \Delta'(x_*) = S'(x_*) - s'(x_*) = P(x_*, y_*) - p(x_*, y_*) \geq 0 \implies \Delta(x) \geq 0$ para todos x en algún intervalo $[x_*, x_* + \varepsilon_*)$ con $\varepsilon_* > 0$.

Ahora suponer, por contradicción, que hay alguna $x_1 > x_o$ en el dominio de Δ con $\Delta(x_1) < 0$. Entonces tenemos un valor:

$$x_* = \sup\{x \in [x_o, x_1] : \Delta(x) = 0\} \in (x_o, x_1)$$

donde $\Delta(x_*) = 0$ y $\Delta(x) > 0$ todos $x \in (x_*, x_1)$. Pero ahora estamos en contradicción de (iii) arriba que dice $\Delta(x) > 0$ algunos $x > x_*$. $\square$

Esta teorema de comparicion 3 junto con la teorema de extension 1 estan utiles en dibujar corectamente la forma de soluciones a e.d.o. aun que tal vez no conocemos sus formulas expicitas.

EJEMPLOS.

- $y' = 1 - x^2 - y^2 = p(x, y) \leq 1 - x^2 = P(x, y)$. Podemos concluir que cualquier solucion $y = s(x)$ de $y' = 1 - x^2 - y^2$ con $s(0) = y_o > 0$ va a tener algun cero $s(x_*) = 0$ con $x_* > 0$ antes que $y = y_o + x - \frac{x^3}{3}$.
- $y' = \sin(xy) \in [-1, 1]$, las soluciones $y = s(x)$, no pueden escapar, siendo atrapados entre $s(0) - x \leq s(x) \leq s(0) + x$. Entonces todos sus soluciones estan definidos para todos valores de x , es decir todos soluciones tienen intervalo maximal de existencia $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.