§ 3: Técnicas de Integración

Ahora consideramos unos ejemplos de E.D.O's que podemos resolver hasta quadraturas (eso es hasta integrales indefinidas).

Ya vimos el ejemplo:

(1) $dy/dx = f(x)$

con soluciones: $y = y_0 + \int_{\xi}^{x} f\,dx$, determinada "hasta quadraturas" (hasta evaluar una integral indefinida)

Similarmente una e.d.o. de la forma:

(2) $dy/dx = g(y)$

tiene soluciones: $x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g}$ (cuando $g \neq 0$)

que vemos en intercambiar ~~...~~ el rol de x, y en (1):

Alternativamente podemos verificar (regla cadena) que si $G(y)$ es una anti-derivada de $\frac{1}{g(y)}$ y $y = s(x)$ satisface $G(s(x)) = x + c$

entonces: $1 = G'(s(x)) \cdot s'(x) = \frac{s'(x)}{g(s(x))}$

$\Rightarrow s'(x) = g(s(x))$.

En practica resolver (1) o (2) consiste en escribir

$\int dy = \int f\,dx \longleftrightarrow y = \int f\,dx + cst.$ || $\int \frac{dy}{g(y)} = \int dx \longleftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} + cst. = x.$

Un combinación de (1), (2) son las e.d.o. que podemos resolver con <u>seperación de variables</u>:

$$\boxed{dy/dx = y' = f(x) \cdot g(y)}$$

Tiene solución las curvas implícitas por:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \,.$$

podemos verificar en considerar anti-derivadas $G(y)$ de $\frac{1}{g(y)}$ y $F(x)$ de $f(x)$

y $y = s(x)$ tal que $s(x_0) = y_0$, y

$$G(s(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0).$$

Diferenciando los dos lados da:

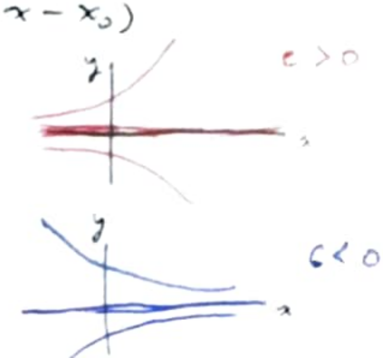
$$G'(s(x))\, s'(x) = F'(x) \Leftrightarrow \frac{s'(x)}{g(s(x))} = f(x)$$

$\Leftrightarrow s'(x) = f(x) g(s(x))$; como deseamos.

$\boxed{\text{Ejemplos:}}$ 1) $dy/dx = c \cdot y \longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int c\, dx$

$$\longrightarrow \log y - \log y_0 = c(x - x_0)$$

$$\longrightarrow y = y_0 e^{c(x - x_0)} \Big].$$

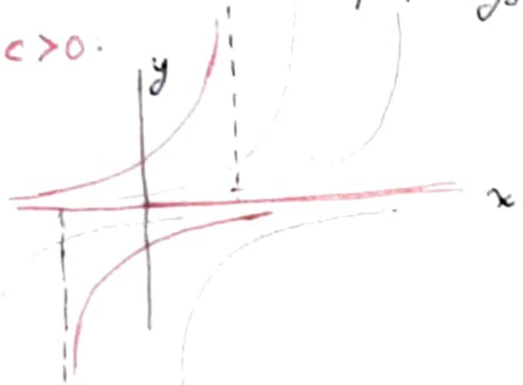


2) $\frac{dy}{dx} = cy^2 \longrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int c\,dx$

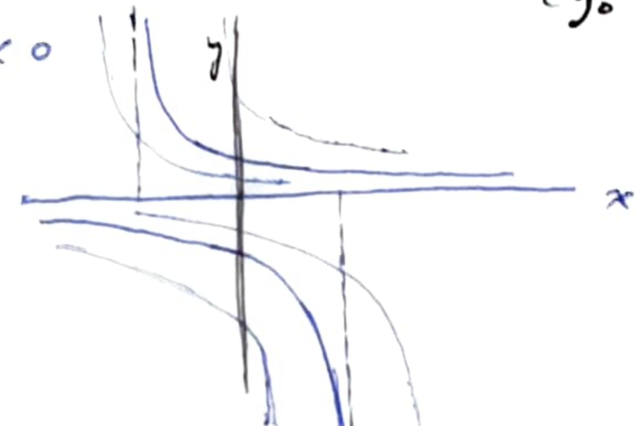
$\longrightarrow -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} = c(x - x_0) \longrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{y_0} + c(x_0 - x)$

$\longrightarrow y = \frac{y_0}{1 + cy_0(x_0 - x)}$ * explota para $x \longrightarrow x_0 + \frac{1}{cy_0}$ *

$c > 0$.



$c < 0$

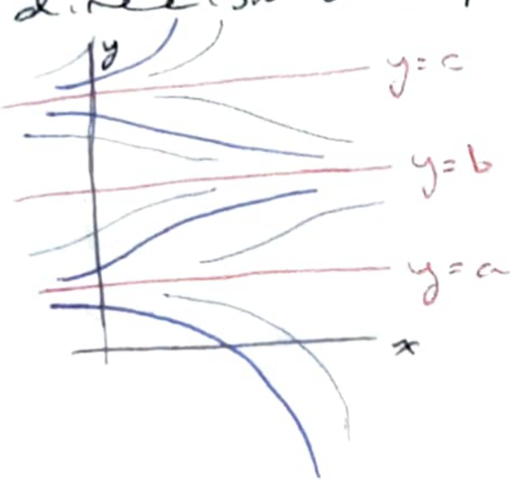


3) $\frac{dy}{dx} = (y-a)(y-b)(y-c)$ $[a < b < c]$

Tiene soluciones explicitas por:

$x = \int \frac{dy}{(y-a)(y-b)(y-c)} + cst.$ [partial fracciones]

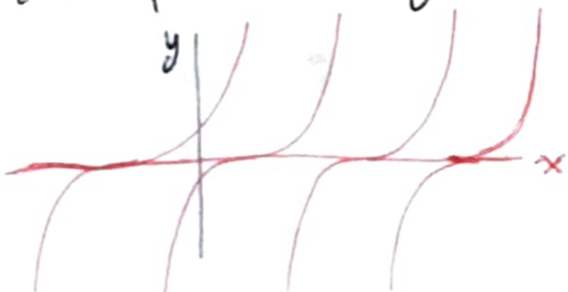
y podemos dibujar las soluciones en considerar la dirección del pendientes:



4) $dy/dx = \sqrt{|y|}$. NOTAR: SIEMPRE tiene pendiente ≥ 0; ó creciendo. Cuando $y>0$ ($|y|=y$) consideramos

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx + cst. \Rightarrow 2(\sqrt{y} - \sqrt{y_0}) = x - x_0$$

$$\Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{y_0} + \frac{x-x_0}{2} \quad (\geq 0)$$ el parte creciendo del parabola $y = \left(\sqrt{y_0} + \frac{x-x_0}{2}\right)^2$. [Similar cuando $y<0$]



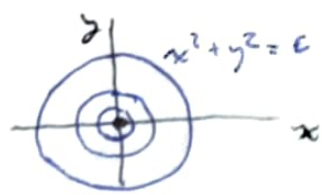
5) $$dy/dx = y/x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + cst.$$

$$\Rightarrow \log y - \log y_0 = \log x - \log x_0$$

$$\Rightarrow y = c \cdot x \quad (c = y_0/x_0).$$

6) $$dy/dx = -x/y \Rightarrow \int y\,dy = -\int x\,dx + cst.$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = cst.$$



Nuestro noción de e.dn. generaliza cuando dejamos de insistir que las curvas integrales (soluciones) son en la forma gráfical $y = s(x)$, pero también pueden ser gráfical sobre y: $x = \sigma(y)$, ó curvas implicitas: $\varphi(x,y) = c = cst.$

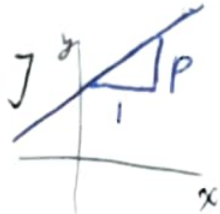
Geometricalmente, quitamos la restricción que el campo de lineas siempre sea 'no-vertical' y permitimos cualquier dirr. de linea prescrito en cada pt.

Para describir un general campo de líneas analíticamente (con fórmulas) recordamos que:

1) líneas no-vertical son dado por:

$$y = p x + b$$ [p el pendiente]

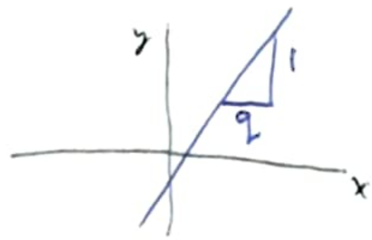
(const.)



2) líneas no-horizontal por:

$$x = q y + a$$

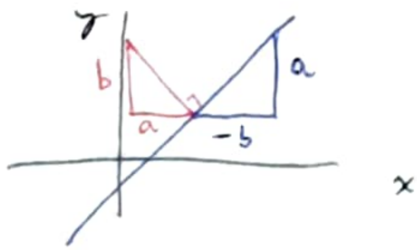
(const.)



3) línea general por:

$$a x + b y = c \qquad (a, b, c \text{ const.})$$

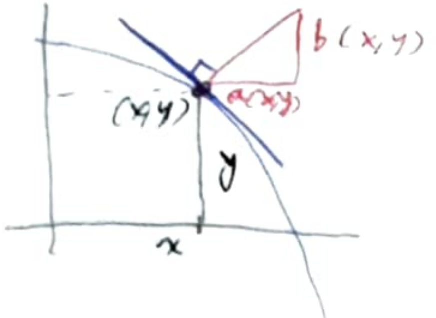
y donde a y b no son simultaneamente zero ($a^2 + b^2 \neq 0$).



Notar: para $\lambda \neq 0$ $\lambda a x + \lambda b y = \lambda c$ es la misma línea.

La dirección de la línea es determinada por (a,b) que dirige la normal a la línea.

Entonces un general campo de líneas sobre el plano está determinado por dos funciones $a(x,y)$, $b(x,y)$; no simultaneamente zero ($a^2+b^2 \neq 0$); donde por el punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ponemos un línea pasando por (x,y) y perpendicular a $(a(x,y), b(x,y))$:



Denotamos tal campo de lineas por:

$$\boxed{a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy = 0}$$

Notar: para cualquier función $\lambda(x,y) \neq 0$

$\lambda(x,y)a(x,y)$ y $\lambda(x,y)b(x,y)$ determina la misma campo de lineas.

En particular, cuando $b(x,y) \neq 0$ las lineas no ~~son~~ vertical, y podemos darlos por su pendiente: $p(x,y) = -\dfrac{a(x,y)}{b(x,y)} = dy/dx$.

Ahora dado un campo de lineas general: $a\,dx + b\,dy = 0$; Buscamos por soluciones (ó curvas integrales) las curvas planar tangente en cada instante al linea por este punto, eso es, buscamos curvas que mueven perpendicular á $(a(x,y), b(x,y))$ en cada instante. En formulas:

Una curva parametrizada $t \mapsto (x(t), y(t))$ sería un solución cuando $a\dot{x} + b\dot{y} = 0 \ \forall t$,

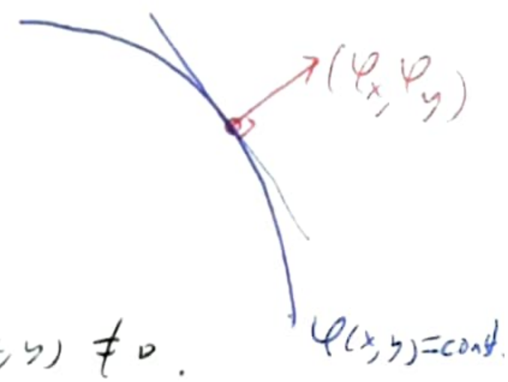
ó: $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = \dot{x} = -b(x,y)\,;\ \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} = a(x,y)}$.

Alternativamente una curva implicita

$$\varphi(x,y) = \text{const.}$$

sería un solución cuando su normal coincide en dirección con (a,b), eso es cuando:

$$(*)\quad \begin{cases} \varphi_x = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu \cdot a \\ \varphi_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu \cdot b \end{cases}$$



para algún función $\mu(x,y) \neq 0$.

Entonces, dado campo lineal general:

$$a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy = 0$$

si ~~alcanza~~ logramos encontrar un función $\mu(x,y)$ $(\neq 0)$

tal que $\mu \cdot a = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, y, $\mu \cdot b = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$

para algún función $\varphi(x,y)$, tenemos soluciones por conjuntos niveles (curvas implícitas);

$$\varphi(x,y) = c = \text{const.}$$

En tal situación llamamos $\mu(x,y)$ un Factor integrante para $a\,dx + b\,dy = 0$.

En caso μ es un factor integrante para $a\,dx + b\,dy = 0$, la conmutividad de parciales de $\varphi(x,y)$ implica: $(\mu \cdot a)_y = (\mu \cdot b)_x$; ó:

$$\left[\mu_y \cdot a - \mu_x \cdot b = \mu(b_x - a_y)\right] \quad (**)$$

Conversamente, si $\mu(x,y)$, $a(x,y)$, $b(x,y)$ satisfacen $(**)$ entonces existe $\varphi(x,y)$ con $\varphi_x = \mu a$ y $\varphi_y = \mu b$.

Entonces resolver el e.d.o. general: $a\,dx + b\,dy = 0$ es equivalente a resolver $(**)$ [también difícil].

Ejemplos [Método Factor INTEGRANTE]:

1) $(\underbrace{x+y}_{a})\,dx + (\underbrace{x-y}_{b})\,dy = 0$

debido a $a_y = 1 = b_x$ y sabemos que existe $\varphi(x,y)$ con $\varphi_x = x+y$, $\varphi_y = x-y$.

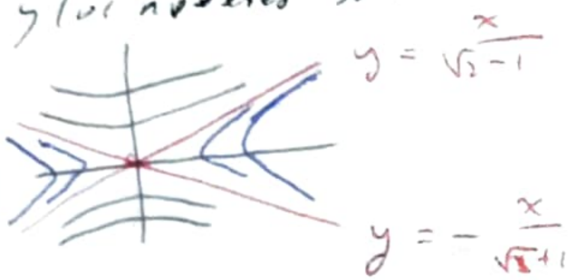
lo encontramos en considerar:

$\varphi_x = x+y \Rightarrow \varphi = \frac{x^2}{2} + xy + g(y)$

y ahora $\varphi_y = x-y = x + g'(y) \Rightarrow g'(y) = -y \Rightarrow g(y) = -\frac{y^2}{2} + \text{cst}.$

$\Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = \frac{(x+(1-\sqrt{2})y)(x+(1+\sqrt{2})y)}{2}$

y los niveles son ciertos hipérbolas:



2) $(\underbrace{2y^2+3x}_{a})\,dx + \underbrace{2xy}_{b}\,dy = 0$

tenemos $a_y = 4y \neq 2y = b_x$; entonces podemos intentar buscar un factor integrante:

$(2y^2+3x)\mu_y - 2xy\mu_x = -2y\cdot\mu$

En caso $\mu_y \equiv 0$ (para que $\mu(x)$ no depende de y)

tenemos $x\cdot\mu_x = \mu \Rightarrow \mu = c\cdot x$.

re-escalando por $\mu = x$ encontramos

$(2xy^2+3x^2)\,dx + 2x^2y\,dy = 0$

$\Rightarrow \varphi_x = 2xy^2 + 3x^2, \quad \varphi_y = 2x^2y$

$\Rightarrow \varphi = x^2y^2 + f(x)$, con: $f'(x) + 2xy^2 = 3x^2 + 2xy^2$

$\Rightarrow f(x) = x^3$ para que

$\varphi(x,y) = x^2y^2 + x^3 = cst.$ define soluciones.

Final, consideramos ecuaciones lineales 1'er orden:

(L) $\left[\dfrac{dy}{dx} = a(x)\,y + b(x) \right]$

NOTAR: si $b(x) \equiv 0$ entonces $y_0(x)$ solución
$\Rightarrow c \cdot y_0(x)$ solución cualquier $c \in \mathbb{R}$.

Igual, si $y_1(x)$, $y_2(x)$ son dos soluciones con $b(x)$ general ($\neq 0$) entonces $y_2(x) - y_1(x)$ es un solución con $b(x) \equiv 0$.

Entonces si encontramos 1 solución a (L), $y_p(x)$ y 1 solución a (L) con $b(x) \equiv 0$; $y_h(x)$, la solución general a (L) sería $y(x) = y_p(x) + c \cdot y_h(x)$

La solución general a (L) podemos encontrar con factor integrante. Considera:

$$-(ay+b)\,dx + dy = 0$$

y buscamos μ t.q:

$$-\left[(ay+b)\mu\right]_y = \mu_x$$

eso es:

$$\mu_x = -a(x)\cdot\mu - (a(x)y + b(x))\mu_y .$$

Tenemos la solución con $\mu_y \equiv 0$ [$\mu(x)$] por

$\mu = e^{-\int a(x)dx}$, y entonces resolviendo

$$\varphi_x = -(a(x)y + b(x))\mu, \quad \varphi_y = \mu$$

$$\Rightarrow \varphi = \mu(x)\cdot y + f(x)$$

para $f(x) = -\int b(x)\mu(x)\,dx + cst.$

En resumen:

$$y = e^{\int_0^x a\,dx}\left[\int_0^x b\cdot\mu\,dx + c\right]$$

para $\mu = e^{-\int_0^x a\,dx}$, y $c = const.$

sería la solución general a $y' = a(x)y + b(x)$.

Podemos motivar esta solución también en preguntar si es posible multiplar (L) por algún $\mu(x)$ t.q. $\mu y' - \mu a(x)y = \mu b(x)$ tiene lado izquierda un derivada total. Esto es el caso para $\mu' = -\mu a(x)$ como arriba y entonces $(\mu y)' = \mu b \Rightarrow \mu y = \int \mu b\,dx$, como antes.

Ejemplo! $y' = \frac{y}{x} + x$; $\mu = e^{-\int \frac{dt}{t}} = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 1 = \left(\frac{y}{x}\right)' \Rightarrow \frac{y}{x} = x + cst. \Rightarrow \boxed{y = x^2 + cx}$$

En Resumen Tenemos las siguientes e.d.o.'s "integrable" [Solución hasta quadratura]

(1) $dy/dx = f(x)\cdot g(y) \rightsquigarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + \text{cst.}$

(2) $dy/dx = a(x)y + b(x)$

$$\rightsquigarrow y = e^{\int a\,dx}\left[\int b\cdot\mu\,dx + \text{cst.}\right]$$

para $\mu = e^{-\int a\,dx}$.

Y en general resolver un E.D.O. general (1$^{\text{er}}$ orden)

$$a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy = 0$$

es equivalente à encontrar un factor integrante que satisface:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)\,a(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)\,b(x,y)\right]$$

Su solución general sería entonces las curvas implicitas $\varphi(x,y) = \text{cst.}$ para

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} A(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} B(x_0,y)\,dy$$

ó:

$$\varphi(x,y) = \int_{y_0}^{y} B(x,y)\,dy + \int_{x_0}^{x} A(x,y_0)\,dx$$

$A = \mu\cdot a = \varphi_x$

$B = \mu\cdot b = \varphi_y$