

SISTEMAS DINAMICOS, PARTE 3: MAS E.D.O. 1'ER ORDEN

Aquí veremos mas técnicas para buscar formulas explicitas (hasta quadraturas $\equiv$ calcular anti-derivadas) de soluciones a una ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.) 1'er orden.

Contents

1	e.d.o. lineal: $y' = a(x)y + b(x)$	2
2	factor integrante	2
3	cambios de variables (substituciones)	4
3.1	$y' = f(y/x)$	5
3.2	$y' = x^k f(y/x^{k+1})$	6
3.3	$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$	6
3.4	$y' = a(x)y + b(x)y^k$ (ecuación de Bernoulli)	6
3.5	un otro tipo de substitución: $p = y'$ (reduccion de orden)	7
A	simetrías e integrabilidad (optativa)	7
B	e.d.o. implicita (optativa)	8

1 e.d.o. lineal: $y' = a(x)y + b(x)$

Una especie de e.d.o. central consiste en las e.d.o. *lineales*. Para nuestro caso actual (e.d.o. 1'er orden):

Definition 1. Una e.d.o. 1'er orden en forma normal se llama lineal cuando tiene la forma:

$$dy/dx = a(x)y + b(x) \quad (1)$$

para algunas funciones (suaves) $a(x), b(x)$ de x . En caso que $b(x) \equiv 0$ la e.d.o. lineal se llama homogénea.

Notamos que un e.d.o. lineal homogénea está separable, y entonces integrable hasta cuadraturas: $y' = a(x)y \implies y = ce^{\int a(x)dx}$ (similar cuando el coeficiente $a(x) \equiv 0$, tenemos un e.d.o. separable). El caso nuevo de interés está cuando $a(x), b(x)$ no son los dos idénticamente cero. Resulta que aquí también tenemos:

Theorem 1. Las soluciones de una e.d.o. lineal (1) están, hasta cuadraturas:

$$y = \frac{\int \mu(x)b(x)dx + c}{\mu(x)}$$

donde c es una constante y $\mu(x) = e^{-\int a(x)dx}$ es un factor integrante.

Proof. Llegamos a la fórmula general para las soluciones en aplicar la siguiente idea: coleccionar la ecuación a la forma $y' - a(x)y = b(x)$ y preguntamos: podemos re-escalar la ecuación en multiplicarlo por un factor $\mu(x)$ tal que el lado izquierdo sería una derivada total? Es decir escalamos la ecuación al $\mu y' - \mu ay = \mu b$ donde el factor $\mu(x)$ está a ser determinado tal que $\mu y' - \mu ay = (\mu y)'$. Por regla de producto, funcionaría cuando tenemos $\mu' = -\mu a$. Esto es un e.d.o. separable con soluciones $\mu(x) = Ce^{-\int a(x)dx}$. Cada elección de tal $\mu(x) \neq 0$ conduce a soluciones $\mu(x)y(x) = \int \mu(x)b(x)dx + cst.$ $\square$

Remark. Es más fácil recordar la estrategia delineada en la demostración que recordar la fórmula general.

EJEMPLOS.

- $y' = y/x + x$, con $\mu = 1/x$, $\implies y = x(x + c)$,
- $y' + xy = xe^{-x^2/2}$, con $\mu = e^{x^2/2}$, $\implies y = (c + \frac{x^2}{2})e^{-x^2/2}$,
- $y' + \frac{a}{1+x}y = 1 + a$, con $\mu = (1+x)^a$, $\implies y = 1 + x + c(1+x)^{-a}$ (cuando $x > -1$, que pasa para $x = -1$?, para $x < -1$?)

2 factor integrante

Nuestras técnicas hasta ahora aplican solamente a e.d.o. en formas muy particulares (separables o lineales). Aquí, al contrario, delineamos un método que podemos

intentar para cualquier e.d.o., el método general de factor integrante. La letra chica de este método es que, generalmente, solo logramos convertir una pregunta difícil (buscar soluciones a la e.d.o.) en otra pregunta difícil (buscar factor integral: solución de una e.d.p. asociada) y, en la situación típica, no sabemos como resolver ninguna de las dos. Aun, esta bueno tener opciones, a veces cambiando perspectiva convierte algo que parece difícil a algo menos difícil.

A saber, el método resume como:

Theorem 2. Para una e.d.o. en el plano, $a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$, cualquier solución $\mu(x, y) \neq 0$ (un factor integrante) al sistema de e.d.p. 1'er orden:

$$\frac{\partial(\mu a)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu b)}{\partial x} \quad (2)$$

conduce a soluciones de la e.d.o. por conjuntos niveles

$$\varphi(x, y) = cst.$$

de cualquier $\varphi(x, y)$ que satisface $\varphi_x = \mu a, \varphi_y = \mu b$.

Proof. Recuerda como justificamos la formula para e.d.o. separables. Si buscamos soluciones como conjuntos niveles de una función $\varphi(x, y)$, el gradiente de φ debe ser proporcional a (a, b) . Sea $\mu(x, y) \neq 0$ este factor de proporción: $\varphi_x = \mu a, \varphi_y = \mu b$. Que parciales de φ conmutan, la función $\mu(x, y)$ debe satisfacer la e.d.p. (2). Conversamente (Lema de Poincaré) si μ satisface la e.d.p. (2), existe un $\varphi(x, y)$ tal que $\varphi_x = \mu a, \varphi_y = \mu b$ (ver siguiente Remark para una formula explicita). $\square$

Remark. En general la e.d.p. (2) para un factor integrante es igual de difícil encontrar alguna solución como la e.d.o. original. En caso que tenemos suerte encontrar alguna solución $\mu(x, y) \neq 0$ de (2) tenemos (Lema de Poincaré) soluciones al e.d.o. original hasta cuadraturas como conjuntos nivel de:

$$\varphi(x, y) = \int_{x_o}^x A(u, y_o) du + \int_{y_o}^y B(x, v) dv = \int_{x_o}^x A(u, y) du + \int_{y_o}^y B(x_o, v) dv$$

donde $A = \mu a$, $B = \mu b$ y fijamos algunos $x_o, y_o \in \mathbb{R}$. Ejercicio: verifica la formula para $\varphi(x, y)$ tiene $\varphi_x = \mu a = A$, $\varphi_y = \mu b = B$ cuando μ satisface (2).

Remark. Si tenemos un e.d.o. $a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$ donde $a_y = b_x$ no es necesario elegir un factor integrante ((2) satisface con $\mu = 1$). Tales ecuaciones llamamos exactas. Entonces la tecnica de factor integrante consiste en buscar un re-escalamiento apropiado tal que $\mu adx + \mu bdy = 0$ sería exacta.

EJEMPLOS.

- $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$, esta exacta. Integrando $\varphi_x = x + y$, $\varphi_y = x - y$ llegamos a conjuntos nivel: $\varphi(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 = cst$. (que son hipérbolas).
- $(2y^2 + 3x)dx + 2xydy = 0$, admite $\mu = x$ por factor integrante.
- $x^k y^l dx + x^m y^n dy = 0$, donde k, l, m, n son constantes. Este podemos convertir a una ecuación separable (en dividir por correctos potencias).

3 cambios de variables (substituciones)

En el mismo espíritu como factor integrante, explicamos otra técnica común que uno puede intentar para cualquier e.d.o., el método de cambios de variables (o substituciones, o transformaciones). Igual como la sección anterior, típicamente este método no sirve porque no es claro como eleccionar tal substitución (mismo dificultad que encontramos cuando intentamos calcular anti-derivadas).

Aun, vale delinear la estrategia detrás del método de substituciones (es una estrategia común):

- dado una e.d.o. original (que imaginamos que no sabemos como resolver)

$$(O) \quad a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0,$$

eligimos algún cambio de variables (o substitucion, o transformacion):

$$(S) \quad x = F(X, Y), \quad y = G(X, Y).$$

- en los nuevos variables, $(*)$, la e.d.o. original va a tener una forma diferente, una *e.d.o. transformada*:

$$(T) \quad A(X, Y)dX + B(X, Y)dY = 0$$

definido por la propiedad que soluciones de (T) corresponden bajo (S) con soluciones de (O) .

- Si la substitución (S) esta exitosa, la e.d.o. transformada (T) sería algo sencillo que podemos resolver, y por consecuencia substituyendo soluciones de (T) en (S) obtenemos soluciones al e.d.o. original (O) .

La letra chica: como elegir (S) para que (T) seria sencillo?

Para usar el método de substituciones la etapa principal consiste en calcular la e.d.o. transformada despues la substitución. Antes presentar la formula general:

EJEMPLO.

- Una e.d.o. lineal $y' = a(x)y + b(x)$, despues una substitución $y = \lambda(x)Y$ (no cambiamos x) tenemos:

$$y' = \lambda'Y + \lambda Y'$$

y entonces la e.d.o. transformada:

$$\lambda Y' + \lambda'Y = a\lambda Y + b \implies Y' = \left(a - \frac{\lambda'}{\lambda}\right)Y + \frac{b}{\lambda}.$$

Si eligimos $\lambda' = a\lambda$, ie $\lambda = e^{\int a(x)dx}$, la e.d.o. transformada esta sencillo: $dY/dx = b(x)/\lambda(x) = B(x)$ que podemos resolver.

En general para transformar e.d.o. despues substituciones:

Theorem 3. Una e.d.o. $a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$, despues una substitución

$$x = F(X, Y), \quad y = G(X, Y)$$

transforma a la e.d.o.:

$$(aF_X + bG_X)dX + (aF_Y + bG_Y)dY = 0.$$

Proof. Considera una curva parametrizada $(X(t), Y(t))$ en el XY -plano. Bajo la substitución dado tal curva transforma a la curva parametrizada $x(t) = F(X(t), Y(t))$, $y(t) = G(X(t), Y(t))$ en el xy -plano. Esta curva sería solución al e.d.o. original exactamente cuando (regla de cadena):

$$\begin{aligned} 0 &= ax' + by' = a(F_X X' + F_Y Y') + b(G_X X' + G_Y Y') \\ \implies 0 &= (aF_X + bG_X)X' + (aF_Y + bG_Y)Y' \end{aligned}$$

es decir exactamente cuando $(X(t), Y(t))$ parametriza una curva integral del e.d.o. transformada $(aF_X + bG_X)dX + (aF_Y + bG_Y)dY = 0$. $\square$

Remark. La formula es facil recordar en substituir dentro de la e.d.o. original las diferenciales: $dx = F_X dX + F_Y dY$, $dy = G_X dX + G_Y dY$.

Presentaremos varias ejemplos de formas especiales de e.d.o. que son posible resolver con una substitución apropiada. Libros clasicos sobre e.d.o generalmente tenia mas gran enfoque en coleccionar tales ejemplos (como colecciones de tablas de integrales). Un ejemplo clásico es: E. Kamke. *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. Band 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler, (1940).

3.1 $y' = f(y/x)$

Dado una e.d.o. en la forma particular $dy/dx = f(y/x)$ (donde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es alguna (suave) función), hacemos la substitución:

$$u = y/x$$

y dejamos x no cambiado. La e.d.o. transformada esta:

$$du/dx = \frac{f(u) - u}{x}$$

y esta en forma separable (que hemos visto como resolver hasta quadraturas).

Por ejemplo, considera una e.d.o. 2' da orden: $\frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + x = 0$ con un parametro $k \in \mathbb{R}$ (un modelo para un resorte con fricción). Esta e.d.o. 2' da orden relacione a una e.d.o. 1' er orden en eliminar tiempo: pon $y = \frac{dx}{dt}$, $-ky - x = \frac{dy}{dt}$ entonces las soluciones parametrizan curvas $t \mapsto (x(t), y(t))$ tangentes a las lineas dirigido por $(y, -ky - x)$, es decir normal a $(ky + x, y)$, o equivalentemente que trazan curvas integrales del campo de lineas $(ky + x)dx + ydy = 0$, o:

$$dy/dx = -k - \frac{x}{y}$$

y podemos resolver usando substitucion $u = y/x$.

3.2 $y' = x^k f(y/x^{k+1})$

Dado una e.d.o. en la forma particular $dy/dx = x^k f(y/x^{k+1})$ (donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es alguna (suave) función), hacemos la substitución:

$$u = y/x^{k+1}$$

y dejamos x no cambiado. La e.d.o. transformada esta:

$$du/dx = \frac{f(u) - (k+1)u}{x}$$

y esta en forma separable (que hemos visto como resolver hasta quadraturas).

3.3 $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$

Dado una e.d.o. en la forma particular $dy/dx = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$ (donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es alguna (suave) función), consideramos los casos:

1. cuando $c = C = 0$, ya vimos como resolver con la substitución $u = y/x$.
2. cuando $b = B = 0$, tenemos una e.d.o. ya separable, y el mismo cuando $a = A = 0$.
3. cuando $\det \begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix} = aB - Ab \neq 0$, consideramos la substitución $Y = \frac{ax+by+c}{Ax+By+C}$, $X = Ax + By + C$ para tener la e.d.o. transformado:

$$X \frac{dY}{dX} = \frac{a + bf(Y)}{A + Bf(Y)} - Y$$

que es en forma separable.

4. cuando $aB = Ab$, y p.ej. $b \neq 0$ tomamos $u = ax + by + c$, y dejamos x el mismo, para tener la e.d.o. transformada:

$$du/dx = a + bf\left(\frac{bu}{Bu + bC - Bc}\right)$$

que esta en forma separable. Similar, cuando $aB = Ab$ y $B \neq 0$ podemos tomar $u = Ax + By + C$, y dejamos x el mismo, para tener la e.d.o. transformada de la forma $du/dx = A + Bf\left(\frac{bu + Bc - bC}{Bu}\right)$, otra vez separable.

3.4 $y' = a(x)y + b(x)y^k$ (ecuación de Bernoulli)

Dado una e.d.o. en la forma particular $dy/dx = a(x)y + b(x)y^k$, con $k \neq 1$ (si $k = 1$, estamos lineal y ya sabemos que hacer) hacemos la substitución:

$$u = y^{1-k}$$

y dejamos x no cambiado. La e.d.o. transformada esta:

$$du/dx = (1-k)a(x)u + b(x)$$

que esta un ecuación lineal (que hemos visto como resolver hasta quadraturas).

3.5 un otro tipo de substitución: $p = y'$ (reduccion de orden)

Un otro tipo de substitucion por ciertos e.d.o. 2'da orden es cuando sustituir $p = dy/dx$, convierte tal e.d.o. de 2'da orden a un e.d.o. de 1'er orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx}) \rightarrow \frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g(y, \frac{dy}{dx}) \rightarrow p \frac{dp}{dy} = g(y, p),$$

que son ejemplos particular de una *reducción de orden*.

Remark. Esta situación ocurre en la fisica (sistemas autonoma, conservativas, con 1-grado de libertad) como:

$$x'' = d^2x/dt^2 = f(x)$$

y el proceso arriba con $v = x' = dx/dt$ reduce al e.d.o. $v dv/dx = f(x) \implies \frac{v^2}{2} = u(x) + cst.$ (conservación de energía) donde la anti-derivada $u(x) = \int f(x)dx$ esta llamado la funcion de fuerza (negativa de potencial).

A simetrías e integrabilidad (optativa)

Mencionanamos un resultado sobre una relacion entre ‘integrabilidad’ (cuando podemos escribir soluciones explicitas hasta quadraturas) y encontrando ciertas simetrías de una e.d.o. 1'er orden:

Definition 2. Una simetría de una e.d.o. $dy/dx = p(x, y)$ es una transformación del plano $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que envia soluciones de la e.d.o. a soluciones: $(x, y(x))$ solución $\implies \sigma(x, y(x))$ otra solución.

Decimos que tenemos una 1-parametro familia de simetrías de la e.d.o. cuando para cada $\epsilon \in \mathbb{R}$ tenemos algún simetría $\sigma_\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de tal e.d.o. con $\sigma_0 = id$ y que no sean triviales: $\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} \sigma_\epsilon(x, y) \neq 0$ algún (x, y) .

Theorem 4. Dado una e.d.o. $dy/dx = p(x, y)$, a lo cual conocemos explicitamente una 1-parametro familia, σ_ϵ , de simetrías de tal e.d.o., entonces tambien conocemos las soluciones de la e.d.o. hasta quadraturas. A saber las soluciones son las curvas implicitas (conjuntos niveles) de:

$$\varphi(x, y) = \int_{y_o}^y \frac{dv}{\eta(x_o, v) - p(x_o, v)\xi(x_o, v)} - \int_{x_o}^x \frac{p(u, y)du}{\eta(u, y) - p(u, y)\xi(u, y)}$$

donde $(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} \sigma_\epsilon(x, y)$ estan (por asunción) conocido explicitamente y $x_o, y_o \in \mathbb{R}$ algunos constantes.

Remark. Otra manera expresar la conclusion del teorema es que dado una 1-parametro familia, σ_ϵ , de simetrías al e.d.o. $y' = p(x, y)$ con $(\xi, \eta) = \frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}\sigma_\epsilon$, entonces tenemos un factor integrante explicita $\mu = \frac{1}{\eta - p\xi}$ para $\frac{dy - p dx}{\eta - p\xi} = d\varphi$, y entonces las soluciones explicitas hasta quadraturas. Ejercicio: puedes ver las simetrias en los ejemplos arriba? Por ejemplo para $y' = f(y/x)$, $y' = x^k f(y/x^{k+1})$?

Para e.d.o.'s de orden más alta la estructura entre simetrías y integrabilidad conenza ser mas intrincada (es decir interesante). Para una introduccion ver p.ej. H. Stephani. *Differential equations: their solution using symmetries*. Cambridge University Press, (1989).

B e.d.o. implicita (optativa)

Una ecuación diferencial implicita es una de la forma:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Sus soluciones son las curvas planar que, cuando dados por gráficas $y = s(x)$, satisfacen identicamente:

$$F(x, s(x), s'(x)) \equiv 0.$$

EJEMPLOS.

- $(y' - xy)(y' + 1) = 0 = (y')^2 + (1 - xy)y' - xy$ es un e.d.o. implicita. Entonces podemos considerar e.d.o. implicita como una generalización de e.d.o. forma normal (o campo de lineas) en que no tiene que ser solo *una* linea definido en cada punto, pero puede ser por ejemplo varias (como varias e.d.o. normal considerado en junto).
- Si logramos resolver la ecuación $F(x, y, y') = 0$ para $y' = f(x, y)$, ya tenemos un e.d.o. en forma normal (y podemos intentar cualquier tecnica arriba).
- Si logramos resolver la ecuacion $F(x, y, y') = 0$ para $y = f(x, y')$, entonces ponemos $p = dy/dx$ y diferenciando con respecto al x tenemos un e.d.o. 1'er orden: $p = f_x + f_p \frac{dp}{dx}$. Cualquier solución $p(x)$ a tal e.d.o. 1'er orden determina una solucion $y(x) = f(x, p(x))$ al e.d.o. implicita original.
- Si logramos resolver la ecuación $F(x, y, y') = 0$ para $x = g(y, y')$, ponemos $p = dy/dx$, y diferenciamos con respecto al y para tener e.d.o. 1'er orden $1 = (g_y + g_p \frac{dp}{dy})p$. Cualquier solución a tal e.d.o. 1'er orden $p(y)$ determina solucion $x(y) = g(y, p(y))$ al e.d.o. implicita original.
- $2y = p^2$, para $p = dy/dx$. Diferenciamos respect al x para tener $p = pp' \implies p = 0$, o, $p' = 1 \implies p = 0$, o, $p = x + c$, y entonces $y = 0$, o, $y = \frac{(x+c)^2}{2}$.

- Una ECUACIÓN DE CLAIRAUT esta una e.d.o. implícita en la forma:

$$y = xy' + f(y').$$

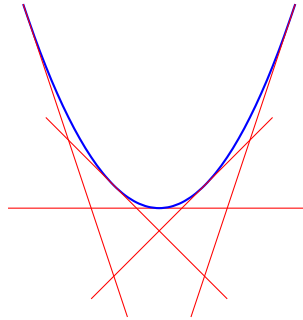
Poniendo $p = dy/dx$ y diferenciamos respecto a x tenemos $0 = (x + f'(p))p' \Rightarrow p' = 0$, o, $x = -f'(p)$ que conduce a dos tipos de soluciones:

$$(*) \quad y = cx + f(c) \quad (1\text{-parametro familia de lineas rectas})$$

o la curva parametrizada:

$$x = -f'(t), \quad y = -tf'(t) + f(t) \quad (\text{solución singular})$$

Resulta que esta curva parametrizada (solución singular) esta la *envolvente* de la 1-parametro familia (*) de lineas rectas:



Soluciones al e.d.o. implícita de Clairaut $y = xy' - \frac{1}{2} (y')^2$ son la parabola $y = \frac{1}{2}x^2$, tambien con todos sus lineas tangentes.