§4: Cambios de Variables.

En evaluando integrales indefinidas (anti-derivadas) la tecnica de substitución, ó cambio de variables, es valuable. Igual para e.d.o.'s y ahora queremos dar unos ejemplos de resolviendo edós por un cambio 'conveniente' de variables.

El metodo de factor integrante para un e.d.o. lineal: $\underline{y' = a(x)y + b(x)}$ podemos ver como ejemplo del método de substitución en la siguiente manera:

substituimos $y = \lambda(x) \cdot Y$ donde $\lambda' = a(x)\lambda$ (entonces $\lambda = e^{\int a\,dx}$). Con esta substitución el e.d.o. original ($y' = a(x)y + b(x)$) se transforma al e.d.o:

$$\cancel{a(x)\lambda(x) \cdot Y} + b(x) = y' = \lambda' \cdot Y + \lambda Y' = \cancel{\lambda(x) a(x) Y} + \lambda Y'$$

$$\Rightarrow \underline{Y' = b(x)/\lambda(x) =: B(x)}.$$

Este e.d.o. transformado tiene solución $Y = \int B\,dx + cst. = y/\lambda(x)$ ∎

La idea general en "resolver un e.d.o. por substitución" consiste en el siguiente esquema:

(1) Dado algún e.d.o. $\boxed{dy/dx = p(x,y) \quad (*)}$ eligimos algún cambio de variables:

$$x = F(X,Y), \quad y = G(X,Y)$$

(2) Determinamos el e.d.o. transformada:

$$\boxed{dY/dX = P(X,Y) \quad (**)}$$

para que soluciones de (**) corresponden bajo $x=F(X,Y)$, $y=G(X,Y)$ a soluciones del e.d.o. original (*).

(3) Esperamos que el e.d.o. transformada es 'sencillo' en el sentido que logramos encontrar algún solución $Y=S(X)$ á (**).

si logramos hacer esto, entonces

$x=F(X,S(X))$, $y=G(X,S(X))$

va a parametrizar un solución al e.d.o. original (*).

En general no hay ningún manera saber que transformación elegir para que el e.d.o. transformado sería 'sencillo' en el sentido que logramos con paso (3) arriba. Pero, hay ciertas situaciones no demasiado dificil reconocer donde un cierto substitución logra resolver nuestro e.d.o. Antes dar esos ejemplos, derivamos la formula general para el e.d.o. transformado (**) despues la substitución $x=F(X,Y)$, $y=G(X,Y)$ arriba:

Proposición: Un e.d.o. de la forma:

$$(*) \quad a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy = 0$$

transforma despues la substitución

$$x = F(X,Y)\ ,\ y = G(X,Y)$$

al e.d.o.:

$$(**) \quad A(X,Y)\,dX + B(X,Y)\,dY = 0$$

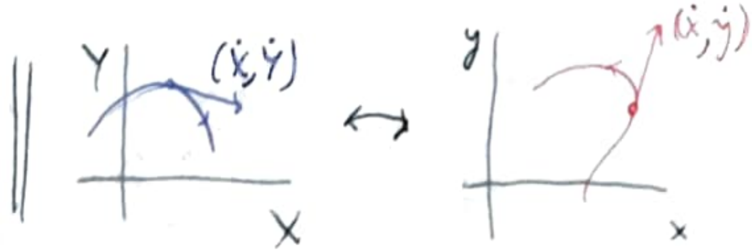
donde $A = a\frac{\partial F}{\partial X} + b\frac{\partial G}{\partial X}$; y ; $B = a\frac{\partial F}{\partial Y} + b\frac{\partial G}{\partial Y}$

evaluando $a = a(F(X,Y),G(X,Y))$, $b = b(F(X,Y),G(X,Y))$.

Es decir cada curva integral de $(**)$ corresponde bajo $x=F(X,Y)$, $y=G(X,Y)$ a una curva integral de $(*)$.

Demostración: considera una curva parametrizada $X(t), Y(t)$ en el XY-plano. Bajo nuestra substitución esta curva corresponde al curva parametrizado:

$$\begin{cases} x(t) = F(X(t),Y(t)) \\ y(t) = G(X(t),Y(t)) \end{cases}$$



con tangentes (regla de cadena) direccionado por

$$\dot x = F_X \dot X + F_Y \dot Y \ ; \ \dot y = G_X \dot X + G_Y \dot Y$$

y esto sería solución de $(*)$ $\iff a\dot x + b\dot y = 0$

$\iff (aF_X + bG_X)\dot X + (aF_Y + bG_Y)\dot Y = 0 \iff X(t), Y(t)$ param. solución de $(**)$. $\square$.

NOTAR: La transformación $(x) \leftrightarrow (X)$ es fácil recordar en substituyendo las diferenciales:

$$dx = \frac{\partial F}{\partial X} dX + \frac{\partial F}{\partial Y} dY, \quad dy = \frac{\partial G}{\partial X} dX + \frac{\partial G}{\partial Y} dY.$$

Ahora consideramos varias ejemplos que uno puede resolver con una transformación apropiada.

Ejemplo: e.d.o.s con escalamiento simetrías:

$$\boxed{dy/dx = f(y/x)}$$

substituimos $\boxed{u = y/x}$ $(y:x = x)$, para

$$\frac{du}{dx} = -y/x^2 + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{x} + \frac{f(u)}{x} = \frac{f(u)-u}{x}$$

que es separable: $\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x} + \text{cst.}$

por ejemplo concreta: $dy/dx = y/x + \tan(y/x)$

conduce a (par $u = y/x$): $\frac{du}{dx} = \frac{\tan(u)}{x}$

$\Rightarrow [\sin(y/x) = c \cdot x]$

Comentario: el último ejemplo es characterizado más geométricamente en que admete un simetría por escalamientos, más preciso que si $y = s(x)$ es una solución entonces escalando la solución $X = \lambda \cdot x$, $Y = \lambda \cdot y$ $(\lambda \neq 0)$ tampien sería solución [p.ej. $y = \lambda s(x/\lambda)$]. Analiticamente, que $p(\lambda x, \lambda y) = p(x, y)$, o geometricamente el pendiente es constante a lo largo rayos por el origen:

Ejemplo: un otra e.d.o. con una similar simetría:

$$\boxed{dy/dx = x^k f\left(\frac{y}{x^{k+1}}\right)}$$

substituimos: $\boxed{u = y/x^{k+1}}$, y tenemos

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^k}{x^{k+1}} f(u) - (k+1)\frac{y}{x^{k+2}} = \frac{f(u)-(k+1)u}{x}$$

que es separable: $\int \frac{du}{f(u)-(k+1)u} = \int \frac{dx}{x} + cst.$

Este forma es relacionado a la simetría $X = \lambda x$, $Y = \lambda^{k+1} y$ que toma soluciones de este e.d.o. a otras soluciones ($y = \lambda^{k+1} s(x/\lambda)$) valido cuando tenemos $dy/dx = p(x,y)$ con $p(\lambda x, \lambda^{k+1} y) = \lambda^k p(x,y)$

Ejemplo: un e.d.o. de la forma:

$$dy/dx = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$$

podemos resolver con substituciones según los siguientes casos:

(a) cuando $c = C = 0$ por $u = y/x$ como 1'er ej. $y' = \varphi(y/x)$

(b) cuando $b = B = 0$ tenemos la forma $y' = \varphi(x)$, ó cuando $a = A = 0$ tenemos $y' = \psi(y)$ (separables).

(c) cuando $\det\begin{pmatrix} a & b \\ A & B\end{pmatrix} = aB - Ab \neq 0$, ponemos:

$$\left[u = ax+by+c;\quad v = Ax+By+C\right]$$

para que:

$\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + bf(u/v)$, $\frac{dv}{dx} = A + Bf(\frac{u}{v})$

$\Rightarrow \frac{du}{dv} = \frac{a + bf(\frac{u}{v})}{A + Bf(u/v)} = \varphi(u/v)$ del 1^{er} tipo que

podemos resolver con $\mathcal{U} = u/v$, $V = v$.

(d) en caso $\det\begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow aB = Ab$, pero p.ej. $\boxed{b \neq 0}$ ponemos: $\boxed{u = ax + by + c}$, para que

$$\frac{du}{dx} = a + bf\left(\frac{u}{\lambda u + C - \lambda c}\right) = a + bf\left(\frac{bu}{B(u-c) + bC}\right) = \varphi(u)$$

[donde $(A, B) = \lambda(a, b)$ algún const. λ] que es separable.

(e) similar cuando $aB = Ab$ y $\boxed{B \neq 0}$, para que $(a, b) = \lambda(A, B)$ algún const. λ, ponemos $\boxed{u = Ax + By + C}$, y tenemos

$$\frac{du}{dx} = A + Bf\left(\frac{b(u - C) + Bc}{Bu}\right) = \varphi(u)$$

que es separable.

<u>Ejemplo</u> [ecuación de Bernoulli]:

$$\boxed{dy/dx = a(x)y + b(x)y^n} \quad (n \neq 1)$$

ponemos $\boxed{u = y^{1-n}}$ y tenemos:

$$\frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = (1-n)\left[a(x)y^{1-n} + b(x)\right]$$

$= (1-n)a(x)u + b(x)$; un ecuación lineal

que sabemos como resolver.

<u>Ejemplo</u> [ecuación de Ricatti]: edo de la forma

$$(*) \quad dy/dx = a(x) + 2b(x)y + c(x)y^2$$

con coeficientes general, <u>no</u> admite soluciones <u>explícitas</u> (ni hasta quadraturas). Aun, hay ciertos casos, con coeficientes 'particular' cuando sí podemos encontrar con cambio de variable soluciones explícitas (hasta quadraturas). Por ejemplo cuando $c(x) \equiv 0$, tenemos un ecuación lineal que podemos resolver, y cuando $a(x) \equiv 0$ un ecuación de Bernoulli, que podemos resolver con $u = 1/y$ á convertir en eq. lineal. También por ejemplo el caso de coeffs constantes $a(x) \equiv a$, $b(x) \equiv b$, $c(x) \equiv c$ es resolvable (separable). Este ecuación Ricatti tiene mucho <u>estructura</u> aún debido a su conexion a nuestros siguientes temas, a saber: sistemas lineales en el plano, y e.d.o. lineal (homogenea) de 2'da orden.

Por ejemplo, veremos:

1) conocer <u>UN</u> solución particular de (*), la solución general sería determinada hasta <u>DOS</u> quadraturas (integrales).

2) conocer <u>DOS</u> soluciones particular de (*), la solución general sería determinada hasta <u>UN</u> quadratura (integral).

3) conocer TRES soluciones particular de (*) determinaría la solución general algebraicamente.

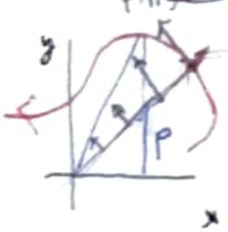
sistema lineal (planar) || e.d.o. lineal 2^{da} orden

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = C(t)x + D(t)y \end{cases} \longleftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y$$

(homogenea)

$$\frac{dp}{dq} = \alpha(q) + 2\beta(q)p + \gamma(q)p^2 \quad \text{(Ricatti)}$$

(sist. lineal)



(la evolución de pendientes desde el origen de trayectorías de un sist. lineal se comportan con un eq. de Ricatti).

Finalmente mencionamos dos más tipos de substitución de un diferente clase ya que substituimos para derivadas en lugar de coordenadas xy- del plano:

(1) $$d^2y/dx^2 = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$$

ponemos $p = dy/dx$, y la 2^{da} orden e.d.o. se reduce a un e.d.o. 1^{er} orden:

(*) $dp/dx = f(x, p)$ que podemos intentar resolver con cualquier técnica disponible.

NOTAR: encontrar algún solucion $p = \sigma(x)$ á (*) tenemos soluciones al e.d.o original en hacer un más integral: $y = \int \sigma(x)\,dx + \text{cst.}$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = g\left(y, \dfrac{dy}{dx}\right)$

ponemos $p = \dfrac{dy}{dx}$, y por regla de cadena:

$\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{dp}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{d^2y}{dx^2} \Big/ p$; eso es reducimos al e.d.o ~~de~~ 1'er orden:

(*) $p \cdot \dfrac{dp}{dy} = g(y, p)$.

si logramos encontrar algún solución a (*), $p = \sigma(y)$ tenemos soluciones al e.do original por

$$x = \int \frac{dy}{\sigma(y)} + cst.$$

Este tipo es común en basica problemas (1 grado de libertad) de física, p.ej:

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = f(x)$; ponemos $v = \dfrac{dx}{dt}$

y tenemos $v \dfrac{dv}{dx} = f(x)$, que integra al conservación de energía: $\underbrace{v^2/2}_{\text{kinetica}} = \underbrace{u(x)}_{(\pm\text{potencial}} + cst.$

donde $u'(x) = f(x)$.
