

SISTEMAS DINAMICOS, PARTE 4: MÉTODO DE SERIES¹

Ahora que hemos vistos los métodos estandares para buscar soluciones explicitas (hasta quadraturas) de e.d.o. 1'er orden, y aceptando que la mayori-
dad de e.d.o. *no* podemos resolver explicitamente, vamos ver unas maneras
estandares para obtener aproximaciones de soluciones.

Contents

1	unas definiciones (e.d.o. mas alta orden, sistemas de e.d.o.)	2
2	series	3
A	métodos numericales (optativa)	5
B	existencia y unicidad: majorantes de Cauchy (optativa)	7
C	existencia y unicidad: iteración de Picard-Lindelöf (optativa)	10

¹Connor Jackman, `connor.jackman@itam.mx`, 9.2026

1 unas definiciones (e.d.o. mas alta orden, sistemas de e.d.o.)

Hemos sido estudiando el primer caso no trivial: un campo de lineas en el plano, o, una e.d.o. 1'er orden. Aqui introducimos varias extensiones de la tema. Primer recordamos:

Definition 1. *Un campo de lineas en el plano es una ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.) de 1'er orden. En forma normal, por una expresion como:*

$$\frac{dy}{dx} = p(x, y).$$

Una e.d.o. 1'er orden implicita consiste en una expresion $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$. Una solucion es una funcion $x \mapsto y(x)$ (definido sobre algún intervalo) tal que $y'(x) = p(x, y(x))$, o, $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

Es decir una e.d.o. 1'er orden consiste en algun relación prescrita par el 1'er derivada de una función, y el desafio esta encontrar tales funciones. Como un tipo de variación en esta tema podemos considerar ecuaciones integrales en que, analiticamente, estamos dado una relacion entre un funcion y unas integrales:

Definition 2. *Una ecuación integral (de 1'er orden) es una expresion como:*

$$y(x) = f(x, y(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} I(x, y(x), u, y(u)) du$$

donde f, a, b, I son dados y buscamos funciones $x \mapsto y(x)$ que satisfacen tal relacion.

Ver §C abajo para una relacion con ecuaciones diferenciales. Otra direccion de generalizar esta con mas variables (importante para aplicaciones: tipicamente estamos interesado en relaciones entre mas que solo dos cantidades).

Definition 3. *Una sistema de n e.d.o.'s 1'er orden esta un campo de lineas en un espacio $n + 1$ -dimensional ($\mathbb{R}^{n+1}$). En forma normal, por n expresiones como:*

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

o, mas concisa en notación vectorial: $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, donde $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, y $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Una solución es una función $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ (definido sobre algún intervalo) tal que $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$.

Remark. Otra dirección que podríamos imaginar generalizando e.d.o. 1'er orden en el plano a dimensiones superiores es en reemplazar el campo de líneas por un campo de planos, un campo de 3-planos, ..., campo de hiperplanos. Esta dirección conduce al estudio geométrico de distribuciones (y ciertas asociados e.d.p. para subvariedades integrales en lugar de curvas integrales). Es una dirección mucho mas intrincado (casi toda matematicas se puede expresar como el estudio de ciertos campos de k-planos sobre espacios apropiados).

Finalmente en lugar de crecer el dimension del espacio podemos crecer el numero de derivadas:

Definition 4. Una e.d.o. de orden n implicita esta una expresion como:

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

o, en forma normal general una expresion como:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}).$$

Una solución es una función $x \mapsto y(x)$ (definido sobre algún intervalo) tal que $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$, o, $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$.

Remark. Una e.d.o. de orden n , y una sistema de n e.d.o.'s estan relacionado. Mas preciso a cada e.d.o. de orden n en forma normal $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, podemos asociar la sistema en $\mathbb{R}^{n+1} \ni (x, y, p_1, \dots, p_{n-1})$ como:

$$dy/dx = p_1, \quad dp_1/dx = p_2, \quad \dots, \quad dp_{n-2}/dx = p_{n-1},$$

$$dp_{n-1}/dx = f(x, y, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}).$$

Aun, una e.d.o. de orden n contiene mas informacion que una sistema de n e.d.o.'s, a saber el plano distinguido xy , sobre que proyectamos las soluciones. Similarmente cualquier colección de varias e.d.o. acopladas de más alta orden tendria una correspondiente sistema de e.d.o. 1'er orden en remplazando derivadas con variables en un espacio de dimension mayor.

2 series

El método mas clasico (de Newton) para superar el hecho que no es posible resolver explicitamente la mayoría de ecuaciones diferenciales consiste en aproximar soluciones con expansiones en series de poder. Recordamos:

Definition 5. Una función $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$, con dominio algún intervalo alrededor $x_o \in \mathbb{R}$ se llama analitica en x_o cuando coincide con algún serie:

$$y(x) = y_o + y_1(x - x_o) + y_2(x - x_o)^2 + \dots$$

(coeficientes $y_o, y_1, y_2, \dots \in \mathbb{R}$) que es convergente para x en algún intervalo alrededor x_o .

De cálculo, recordamos:

Proposition 1. *Una función analítica en x_o esta suave (clase C^∞) en x_o . Es decir sus derivadas de cualquier orden en x_o existen. Además las coeficientes de su expansion en serie de poder estan dados por (serie de Taylor):*

$$y_o = y(x_o), \quad y_1 = y'(x_o), \quad 2y_2 = y''(x_o), \quad \dots$$

con coeficiente general: $y_k = \frac{y^{(k)}(x_o)}{k!}$.

Remark. *Una función suave no tiene que ser analítica. El ejemplo estandar:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}. \text{ Es suave en } \mathbb{R}, \text{ pero no analítica en } x_o = 0.$$

Observamos: si $y(x)$ es una solución de una e.d.o. $y' = p(x, y)$ con $p(x, y)$ suave, entonces todas las derivadas de orden superior de $y(x)$ estan determinados recursivamente (y de manera unica) por diferenciar repetidamente la ecuación diferencial. Es decir, la expansion en serie de Taylor de cualquier solución, hasta cualquier orden, es algo que podemos calcular explícitamente.

EJEMPLOS.

- $y' = y$ (ya sabemos las soluciones $y = y_o e^x$). Una solución, $y(x)$, con condición inicial, $y(0) = y_o$, tiene (evaluar la e.d.o. en $x = 0$): $y'(0) = y(0) = y_o$. También si diferenciamos la e.d.o. tenemos $y'' = y'$ esta satisfecho para cualquier solución y entonces, evaluando en $x = 0$, tenemos $y''(0) = y'(0) = y(0) = y_o$. Inductivamente tenemos $y^{(k)}(0) = y_o$ y la solución en serie de poder:

$$y(x) = y_o \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \right) = y_o e^x.$$

- $y' = x^2 + y^2$. Una solución con condición inicial $y(0) = y_o$ tiene $y'(0) = 0 + y_o^2 = y_o^2$. Diferenciamos la e.d.o. conduce a $y'' = 2x + 2yy'$, y evaluando en $x = 0$, que $y''(0) = 2 \cdot 0 + 2y_o y'(0) = 2y_o^3$. Diferenciamos la e.d.o. de nuevo conduce a $y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy''$ y evaluando en $x = 0$, que $y'''(0) = 2 + 2(y'(0))^2 + 2y_o y''(0) = 2 + 2y_o^4 + 4y_o^4 = 2 + 6y_o^4$. Entonces la expansion de tal solución en serie de poder, hasta orden 3, sería:

$$y(x) = y_o + y_o^2 x + y_o^3 x^2 + \left(\frac{1}{3} + y_o^4\right)x^3 + O(x^4).$$

- $x^2 y' + y = x$ (es una e.d.o. lineal, entonces ya sabemos sus soluciones hasta cuadraturas: $y = e^{1/x} \left(\int \frac{dx}{x e^{1/x}} + c \right)$). Notar: $x = y = 0$ es un punto singular, nos interesa examinar el método para soluciones que pasan por el punto singular. Podemos proceder igual como los ejemplos anteriores pero, para hacer algo diferente, una otra opción para sacar las coeficientes

del serie de poder esta en sustituir directamente. Mas preciso, hacemos el ‘Ansatz’ que tenemos una solucion en forma de serie de poder alrededor $x = 0$: $y = y_o + y_1x + y_2x^2 + \dots$ con $y' = y_1 + 2y_2x + 3y_3x^2 + \dots$ que substituímos en $x^2y' + y = x$ para tener:

$$y_o + (y_1 - 1)x + (y_2 + y_1)x^2 + (y_3 + 2y_2)x^3 + (y_4 + 3y_3)x^4 + \dots = 0$$

entonces $y_o = 0, y_1 = 1, y_2 + y_1 = 0, y_3 + 2y_2 = 0, y_4 + 3y_3 = 0, \dots$, o en general $y_{k+1} + ky_k = 0$ para que $y_k = (-1)^{k-1}(k-1)!$ y el serie de poder:

$$y(x) = x - x^2 + 2!x^3 - 3!x^4 + \dots = x \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k! x^k \right)$$

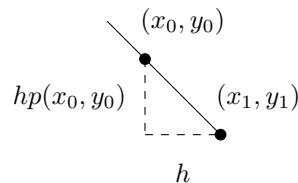
una serie que, para cualquier $x \neq 0$, es divergente!

El método de series es conceptualmente sencillo y directo. Tambien esta flexible: se puede usar en muchas situaciones, como sistemas de mas e.d.o. acoplados, e.d.o. de mas alta orden, o para sistemas con parametros (buscando soluciones con expansiones en tal parametro). Aun, debemos notar unos puntos. Primer: no es siempre facil encontrar un patron por induccion en las coeficientes. En practica tipicamente calculamos hasta algun orden cuando cansamos o tenemos suficientes terminos para la precision que nuestro aplicacion requiere. Segundo, algo que parece mas preocupante, hemos visto que a veces las series que sacamos pueden ser divergentes!

Una respuesta sobre la convergencia de soluciones en series fue establecido por Cauchy (ver §B). En breve dice que cuando las funciones que definan la e.d.o. son analiticas (p.ej. $y' = p(x, y)$ con $p(x, y)$ una funcion analitica), entonces tambien sus soluciones son analiticas, dado por series siempre *convergentes* que estamos sacando con este método de series. Algo un poco mas interesante es que cuando sale series divergentes (p.ej. cuando hay punto singular de $p(x, y)$) aun son utiles (son ‘expansiones asintoticas’ de soluciones).

A métodos numericales (optativa)

Hay muchos algoritmos para sacar soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo la siguiente método de Euler consiste en ‘discretizar y seguir las tangentes’ para obtener un poligono que aproxima las soluciones:



Dado una e.d.o. $y' = p(x, y)$, eligimos un tamaño de paso $h > 0$, y generamos aproxima soluciones discretas con la recursion:

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) - (x_k, y_k) = h(1, p(x_k, y_k)).$$

Cualquier método algorítmico (como método de series, método de Euler) no está completo sin analizar la rapidez con que converge a la solución buscada en términos de estimaciones de errores (análisis de la eficiencia de tal algoritmo en respuesta a preguntas como: para estar tal y tal cerca a solución verdadera, cuántas iteraciones tendría que calcular?). Notamos que hay muchos diferentes algoritmos diseñados para aproximar soluciones de e.d.o. en maneras más eficientes (ver p.ej., ch. 8: ‘Numerical methods’ en Boyce-DiPrima con una descripción del método de Runge-Kutta).

Es bueno de vivir hoy porque tales algoritmos comunes ya están implementados en programas estándar. Entonces es fácil experimentar para obtener y verificar los resultados que estamos aprendiendo a calcular por mano.

Hacemos unos ejemplos con SageMath (puedes correr programas simples en línea [aquí](#)), donde los siguientes están relevantes para nuestro tema actual:

- dibujar un campo de líneas, dado por pendientes, p.ej. $dy/dx = y(y-3)$:

```
x,y = var('x y')
plot_slope_field(y * (y - 3), (x, 0, 5), (y, -2, 4)).show()
```

- para dibujar unas curvas integrales:

```
x,y = var('x y')
streamline_plot((1, y*(y-3)), (x,0,5), (y,-2,4)).show()
```

- para buscar general solución explícita de una e.d.o. (p.ej. $y' - y = 1$):

```
x = var('x')
y_sol = function('y_sol')(x)
desolve(diff(y_sol,x)-y_sol==1, y_sol).show()
```

Notar: para derivadas de más alta orden, ponemos `diff(f,x,n)`, para la n -ésima derivada de f con respecto a x . La ‘`desolve`’ puede funcionar para e.d.o. hasta orden 2. Para condiciones iniciales, p.ej. $x_0 = 10, y_0 = 2$, tenemos:

```
desolve(diff(y_sol,x) + y_sol - 1, y_sol, ics=[10,2]).show()
```

Si queremos dibujar una solución gráfica particular, tenemos:

```
plot(desolve(diff(y_sol,x) + y_sol - 1, y_sol, ics=[10,2]))
```

También `desolve` puede manejar e.d.o. con soluciones en forma de curvas implícitas. Solo para graficarlos tenemos que proceder un poco diferente, p.ej. para $\sin y \, dy - \cos x \, dx = 0$:

```
x, y = var('x, y')
y_sol = function('y_sol')(x)
sol = desolve(diff(y_sol, x)*sin(y_sol) == cos(x), y_sol, ics=[0, 0])
implicit_plot(sol.substitute({y_sol:y}), (x, -1, 4), (y, -3, 3))
```

- para producir soluciones aproximadas de una e.d.o. (algoritmo Runge-Kutta orden 4, p.ej. $y' = y(y - 3)$):

```
x,y = var('x y')
pts = desolve_rk4(y*(y - 3), y, ics=[0, 0.5], ivar=x, end_points=[-4,6],
step=0.1, output='list')
list_plot(pts, plotjoined=True, color='blue').show()
```

Unas alternativas son

```
desolve_rk4(y*(y-3),y, ics=[0, 0.5], ivar=x, end_points=[-4,6],
step=0.1, output='plot').show()
```

para dibujar directamente la curva integral, o:

```
desolve_rk4(y*(y-3),y, ics=[0, 0.5], ivar=x, end_points=[-4,6],
step=0.1, output='slope_field').show()
```

para dibujar con el campo de lineas.

- para producir soluciones de una e.d.o. en series de poder, tenemos (p.ej. para soluciones de $y' = x^2 + y^2$ con $y(0) = c$):

```
x, y, c = var('x y c')
p = x^2 + y^2
N = 5
D = lambda g: diff(g, x) + p * diff(g, y)
coeffs = [c]
d_expr = p
for k in range(1, N + 1):
coeffs.append(d_expr.subs({x:0, y:c}))
d_expr = D(d_expr)
y_ser = sum(coeffs[k] * x^k / factorial(k) for k in range(N + 1))
Para ver/graficar el serie con valor inicial, como  $y(0) = 1$ , tenemos:
y_ser.substitute({c:1}).show()
plot(y_ser.substitute({c:1}), (x,-1,1))
```

Ver por ejemplo [aquí](#), para documentacion y cosas similar para sistemas de e.d.o., o tambien [aquí](#) para cosas similar usando `ode_solver()`.

B existencia y unicidad: majorantes de Cauchy (optativa)

La ‘teorema fundamental sobre e.d.o.’ refiere generalmente a algo sobre existencia y unicidad. De menudo usamos este teorema sin pensar (cuando encontramos una solucion con dados condiciones iniciales dejamos intentando buscar

mas). Tambien como hay varias teoremas de comparicion hay varias teoremas de existencia/unicidad. Con regularidad analitica:

Theorem 1 (existencia/unicidad: Cauchy). *Considera una sistema e.d.o. en forma normal: $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ donde*

$$\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

es analitica en algún punto $(t_o, \mathbf{x}_o) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Entonces, existe única solucion: $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ del sistema con valor inicial $\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x}_o$ definido para t en algun intervalo que contiene t_o . Ademas $\mathbf{x}(t)$ esta analitica en t_o .

Remark. *Hay bastantes extensiones² de esta resultado como: dependencia analitica por condiciones iniciales, parámetros, o alrededor una solucion definido por intervalo finito, o aun para ciertas e.d.p. en la teorema Cauchy-Kovalevskaya. Notamos tambien que la resultado esta util en practica ya que la unica obstrucion a conocer las coeficientes de tales series a cualquier orden es el tiempo computacional: dado suficiente tiempo es posible calcular por mano estas coeficientes hasta el orden deseada.*

Proof. (sketch). Delineamos la demostración para una e.d.o. 1'er orden en forma normal: $y' = p(x, y)$. Para una sistema, uno aplique las mismas ideas, solo requiere mas notación para traquear mas indices.

Aplicando una traslacion de (x_o, y_o) al origen seria suficiente establecer que existe solucion analitica de $y' = p(x, y)$ con $y(0) = 0$ cuando $p(x, y)$ esta analitica en $x = y = 0$ (tal solución esta necesariamente única, porque las coeficientes de serie de poder de cualquier otra solucion tendrian que coincidir con los de tal solucion analitica). Establaceremos usando las siguientes lemmas. El primer sale con induccion:

Lemma 1. *Si $y(x)$ satisface $y' = p(x, y)$ entonces sus derivadas superiores estan determindando recursivamente por:*

$$y^{(k)} = p_x^{(k-2)} + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-2}{j-1} y^{(j)} p_y^{(k-1-j)}$$

donde, para $f(x, y)$ ponemos: $f^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k} f = (\partial_x + p(x, y)\partial_y)^k \cdot f$. En particular $y^{(k)}(0)$ esta determinado por un polinomio con coeficientes enteros en las variables $p_{ab} = \frac{1}{a!b!} \frac{\partial^{a+b}}{\partial x^a \partial y^b} p(0, 0)$, .

Entonces para una solucion en serie de poder solo hay una opcion, a saber el serie de poder con coeficientes dado en lemma 1. Queremos mostrar que, cuando el serie de poder:

$$p(x, y) = p_{00} + p_{10}x + p_{01}y + \dots = \sum_{a,b=0}^{\infty} p_{ab}x^a y^b$$

²Ver p.ej. T. I, ch. II, §27 de H. Poincare. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, T. I, II, III. Paris, Gauthier-Villars, 1893, 1892, 1899.

esta convergente alrededor $x = y = 0$, entonces tambien la serie resultante de lemma 1 para las soluciones de $y' = p(x, y)$ converge. Esto hacemos mas facil con la siguiente consecuencia de lemma 1:

Lemma 2. Sea $p(x, y) = \sum_{a,b=0}^{\infty} p_{ab} x^a y^b$, $P(x, y) = \sum_{a,b=0}^{\infty} P_{ab} x^a y^b$ dos series formales con

$$|p_{ab}| \leq P_{ab}, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Entonces las series formal para soluciones con $y(0) = 0, Y(0) = 0$, determinado de lemma 1, $y(x) = y_1 x + y_2 x^2 + \dots$, $Y(x) = Y_1 x + Y_2 x^2 + \dots$ tambien satisfacen

$$|y_j| \leq Y_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Proof. Sea Q_j el polinomio en Lemma 1 que determina $y^{(j)}(0) = Q_j(p_{ab})$, y $Y^{(j)}(0) = Q_j(P_{ab})$. Ya que las coeficientes de Q_j son positivas, tenemos:

$$|y^{(j)}(0)| \leq Q_j(|p_{ab}|) \leq Q_j(P_{ab}) = Y^{(j)}(0).$$

□

Remark. Para dos series formal, $p(x, y) = \sum_{a,b=0}^{\infty} p_{ab} x^a y^b$, $P(x, y) = \sum_{a,b=0}^{\infty} P_{ab} x^a y^b$ con $|p_{ab}| \leq P_{ab}$ como en la Lemma 2, decimos que P es un majorante de p .

Ahora la estrategia esta asi: debemos buscar una $P(x, y)$ que es majorante de $p(x, y)$ y para que sabemos la solución $Y(x)$ con $Y(0) = 0$ de $Y'(x) = P(x, Y(x))$ esta analitica, es decir la serie formal de $Y(x)$ converge. Entonces por lemma 2 tendríamos que tambien la serie formal para $y(x)$ con $y(0) = 0$ converge gracias al prueba de comparicion ($|y_j| \leq Y_j$) y estaríamos terminados.

Entonces, que $p(x, y)$ esta analitica en $x = y = 0$, significa que hay algun $\xi > 0, \eta > 0$ para que la serie

$$p(\xi, \eta) = \sum_{a,b=0}^{\infty} p_{ab} \xi^a \eta^b$$

converge. En particular, al menos, sus terminos son acotados:

$$|p_{ab} \xi^a \eta^b| \leq M, \quad \text{algún constante } M > 0.$$

Entonces tomamos $P_{ab} = M/\xi^a \eta^b$, y tenemos, por construccion, un majorante de $p(x, y)$ dado por:

$$P(x, y) = \sum_{a,b=0}^{\infty} P_{ab} x^a y^b = \frac{M}{(1 - x/\xi)(1 - y/\eta)}.$$

La e.d.o. $y' = P(x, y)$ esta separable y su solución $Y(x)$ con $Y(0) = 0$ esta explicitamente:

$$Y(x) = \eta \left(1 - \sqrt{1 + 2M \frac{\xi}{\eta} \log(1 - \frac{x}{\xi})} \right)$$

que es, en particular, analitica en $x = 0$, como deseamos.

□

C existencia y unicidad: iteración de Picard-Lindelöf (optativa)

Si queremos considerar sistemas con menos regularidad tenemos:

Theorem 2 (existencia/unicidad: Picard-Lindelöf). *Considera una sistema e.d.o. $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ donde*

$$\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

es Lipschitz alrededor el punto $(t_o, \mathbf{x}_o) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Entonces, existe única solución: $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ del sistema con valor inicial $\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x}_o$ definido para t en algún intervalo que contiene t_o .

Remark. *Una función, f , es Lipschitz alrededor el punto p_o cuando existe barrio U de p_o y constante $L > 0$ tal que $|f(p) - f(q)| \leq L|p - q|$ para todos $p, q \in U$. Por ejemplo cada función de clase C^1 es localmente Lipschitz (es decir Lipschitz en algún barrio alrededor cualquier punto).*

Remark. *La demostración de la teorema 2 es interesante conceptualmente en que reformulamos buscando soluciones del e.d.o. como buscando puntos fijos de un operador apropiado (ecuación integral), y verificamos que teorema 3 sobre mapeos de contracción aplica para concluir el resultado anunciado.*

Proof. (sketch). Primer reformulamos buscando solución de e.d.o. como buscando solución de una ecuación integral. Fijamos la condición inicial $(t_o, \mathbf{x}_o)$ y notamos que una curva $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x}_o$, que es solución:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

también tenemos (integrando):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_o + \int_{t_o}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds$$

y conversamente también: tomando derivada de la ecuación integral tendríamos una solución del e.d.o. original. Tendremos nuestro teorema si demostramos que el operador:

$$I : \Gamma \dashrightarrow \Gamma, (I\mathbf{x})(t) = \mathbf{x}_o + \int_{t_o}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds$$

tiene punto fijo, $(I\mathbf{x})(t) = \mathbf{x}(t)$, única en $\Gamma = \{\gamma : [t_o - \delta, t_o + \delta] \xrightarrow{cts} B_r(\mathbf{x}_o), \}$ un espacio de aplicaciones continuas de algún intervalo $[t_o - \delta, t_o + \delta]$ a una bola $B_r(\mathbf{x}_o) = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_o| \leq r\}$ para algún elección apropiada de $\delta > 0, r > 0$.

Primer, que $\mathbf{f}$ esta localmente Lipschitz alrededor $(t_o, \mathbf{x}_o)$, podemos elegir $r, \delta > 0$ tal que

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

para todos $t, s \in [t_o - \delta, t_o + \delta]$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_r(\mathbf{x}_o)$.

En sus cursos de analisis vas a ver que Γ es un espacio metrica completa con la norma:

$$\|\gamma - \tilde{\gamma}\|_\infty = \sup\{|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| : t \in [t_o - \delta, t_o + \delta]\}.$$

Aceptando este, verificamos que en elegir $\delta > 0$ apropiadamente que $I : \Gamma \rightarrow \Gamma$ esta un mapeo de contraccion y entonces, por teorema 3 estamos terminado. A saber, primer, para $\gamma \in \Gamma$ tenemos:

$$|(I\gamma)(t) - \mathbf{x}_o| = \left| \int_{t_o}^t \mathbf{f}(s, \gamma(s)) ds \right| \leq \sum_{j=1}^n \int_{t_o}^t |f_j(s, \gamma(s))| ds$$

donde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. En particular, que $\mathbf{f}$ es clase Lipshitz, esta continuo, y entonces existe $C > 0$ tal que $|f_j(s, \mathbf{x})| \leq C/n$, $\forall s \in [t_o - \delta, t_o + \delta]$, $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_o)$. Notar: si disminuimos δ aun podemos dejar el mismo C . Entonces tenemos para todos $t \in [t_o - \delta, t_o + \delta]$ que:

$$|(I\gamma)(t) - \mathbf{x}_o| \leq C|t_o - t| \leq C\delta$$

En particular, eligiendo tambien $\delta \leq C/r$, tenemos $I\gamma \in \Gamma$, o, $I : \Gamma \rightarrow \Gamma$. Finalmente, para ver que podemos elegir δ t.q. I es una contraccion, calculamos para $\gamma, \tilde{\gamma} \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \|I\gamma - I\tilde{\gamma}\|_\infty &= \sup_{|t-t_o| \leq \delta} \left| \int_{t_o}^t \mathbf{f}(s, \gamma(s)) - \mathbf{f}(s, \tilde{\gamma}(s)) ds \right| \leq \sup_{|t-t_o| \leq \delta} \int_{t_o}^t |\mathbf{f}(s, \gamma(s)) - \mathbf{f}(s, \tilde{\gamma}(s))| ds \\ &\leq L \sup_{|t-t_o| \leq \delta} \int_{t_o}^t |\gamma(s) - \tilde{\gamma}(s)| ds \leq L\|\gamma - \tilde{\gamma}\|_\infty \sup_{|t-t_o| \leq \delta} |t - t_o| \\ &= L\delta\|\gamma - \tilde{\gamma}\|_\infty \end{aligned}$$

que esta una contraccion en eligiendo tambien $\delta < 1/L$.

□

Theorem 3 (Mapeos contraccion). *Sea X un espacio metrica completa, y $f : X \rightarrow X$ un mapeo de contraccion:*

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$$

para algún constante $\lambda \in (0, 1)$ y para todos $x, y \in X$. Entonces existe unica punto fijo, $f(x_*) = x_*$, de f en X .

Proof. Primer veremos que un punto fijo, si existe, tiene que ser unica. A saber si $f(x_o) = x_o$, y $f(x_1) = x_1$ entonces $|x_o - x_1| = |f(x_o) - f(x_1)| \leq \lambda|x_o - x_1| \implies (1 - \lambda)|x_o - x_1| \leq 0$, donde $\lambda \in (0, 1)$, que solamente esta posible si $|x_o - x_1| = 0$, ie, $x_o = x_1$. Queda demostrar que un punto fijo existe. Para este elige cualquier punto $x_o \in X$ y considera la secuencia de puntos:

$$x_o, x_1 = f(x_o), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$$

Demostraremos que esta secuencia es Cauchy, y debido a que X esta completa, converge (ademas esta limite seria nuestro punto fijo). Para esto, observa que:

$$|x_j - x_{j+1}| \leq \lambda^j |x_o - x_1|$$

y entonces para cualquier $n, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n+k}| &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \dots + |x_{n+k-1} - x_{n+k}| \\ &\leq \lambda^n (1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{k-1}) |x_o - x_1| = \lambda^n \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} |x_o - x_1| < C \lambda^n \end{aligned}$$

donde $C = \frac{|x_o - x_1|}{1 - \lambda}$ es algun constante. Ya que $\lambda \in (0, 1)$, tenemos $C \lambda^n \rightarrow 0$ y entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, tenemos $N > 0$ suficientemente grande tal que $|x_n - x_{n+k}| < \varepsilon$ todos $n \geq N$ y $k \geq 0$, que es decir $x_o, x_1, x_2, \dots$ es Cauchy. Por asumcion que X es completa, $x_o, x_1, \dots$ esta convergente y tenemos un limite $x_j \rightarrow x_* \in X$, y ya que mapeos de contraccion son continuos, tenemos:

$$x_* = \lim x_j = \lim x_{j+1} = \lim f(x_j) = f(\lim x_j) = f(x_*)$$

que es decir nuestro punto fijo existe. □

Remark. *Entonces la teorema de Picard-Lindelöf no solamente demuestra la existencia de una solución, pero tambien incluye un algoritmo para aproximar tal solucion. A saber comenzar con cualquier $\gamma_o : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y calcular las iteraciones: $\gamma_1 = I\gamma_o$, $\gamma_2 = I\gamma_1, \dots$ para obtener una secuencia de curvas que limiten hasta la solucion. Mas explicita, podemos usar:*

- Sea $\gamma_o(t) \equiv \mathbf{x}_o$, una curva inicial (constante),
- toma $\gamma_1(t) = \mathbf{x}_o + \int_{t_o}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_o) ds$,
- toma $\gamma_2(t) = \mathbf{x}_o + \int_{t_o}^t \mathbf{f}(s, \gamma_1(s)) ds$,
- ... toma $\gamma_{k+1}(t) = \mathbf{x}_o + \int_{t_o}^t \mathbf{f}(s, \gamma_k(s)) ds \dots etc.$