§5: E.D.O. IMPLICITAS, generar definiciones

Hasta ahora hemos considerados e.d.o's de 1'er orden en la forma regular:

$$dy/dx = p(x,y)$$

(un campo de lineas no vertical) y a veces lo mas general campo de lineas:

$$a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy = 0,$$

donde quitamos restricciones sobre donde el campo de lineas estan dirigidos.

Otra noción ~~de~~ e.d.o. 1'er orden mas general de 1'er forma regular es un e.d.o. 1'er orden IMPLICITA, que es un expresión:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

las soluciones de tal e.d.o. 1'er orden implicita son las funciones $s(x)$ tal que substituyendo $y = s(x)$ en F resulta en un identidad:

$$F(x, s(x), s'(x)) \equiv 0.$$

Ejemplo:

$$(y')^2 + y'\cdot(1-xy) \overset{(*)}{=} xy$$

se puede factorizar en la forma:

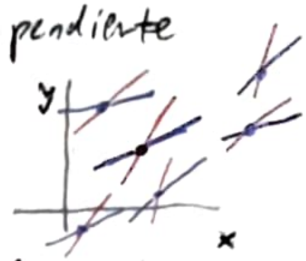
$$(y' - xy)(y'+1) = 0$$

entonces, el e.d.o. implicita $(*)$ es equivalente a 2 e.d.o's en forma regular $[y' = xy,\ ó,\ y' = -1]$.

Generalmente, un e.d.o. implícita consideramos localmente como un e.d.o. en forma regular cuando resolvemos la ecuación

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \quad \text{para} \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

Como el último ejemplo ilustra, no tiene que ser solución única para dy/dx entonces podemos pensar de edo's implícita en permitiendo el pendiente tener varios valores en cada punto:



Entonces un e.d.o. implícita 1'er orden esta determinado por un función de 3 variables: $F(x,y,p)$. Por teorema función implícita, en los puntos de $F=0$ donde $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$, es posible resolver para $p = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$ localmente como un e.do 1'er orden en forma regular.

Los puntos donde $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$ son puntos singular del e.d.o. implícita.

$\boxed{\text{ejemplo:}}$ $(xy')^2 = \log(1+x)$

tiene $x=0$ (y, y' arbitraria) como un punto singular.

Alrededor puntos regular podemos pensar del e.d.o. implícita en forma regular, ó a veces es más sencillo proceder un poco diferente (que puede ser difícil resolver para $p = dy/dx = f(x,y)$).

1) En caso que resolvemos un e.d.o. implícita $F(x,y,p)=0$ para 'y':

$y = f(x,p) \longleftrightarrow F(x,y,p)=0$, podemos diferenciar $y=f(x,p)$ con respecto al x y usar que $dy/dx = p$, para tener:

$$\left[\, p = f_x(x,p) + f_p(x,p)\cdot \frac{dp}{dx} \,\right]$$

cuando $f_p \neq 0$, cualquier solución al

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - f_x(x,p)}{f_p(x,p)} \quad ; \quad p = \sigma(x) \text{; conduce}$$

a solución $y = f(x, \sigma(x))$ del e.d.o. implícita original.

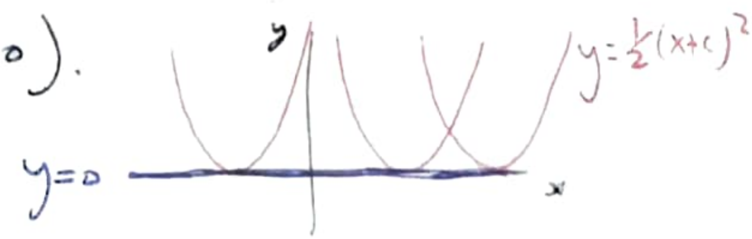
$\boxed{\text{Ejemplo:}}$ $\quad 2y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = p^2.$

* podríamos resolver para $dy/dx = \pm\sqrt{2y}$ y considerar casos, alternativamente, diferenciamos los dos lados respecto a x para tener:

$$2\frac{dy}{dx} = 2p = 2p\frac{dp}{dx} \Rightarrow p = 0, \text{ ó},$$

$$\frac{dp}{dx} = 1 \Rightarrow p = x + c \Rightarrow \boxed{2y = (x+c)^2}$$

(ó $p = 0 \Rightarrow y \equiv 0$).



(2) En caso que resolvemos un e.d.o. implícita $F(x,y,p)=0$ para 'x':

$$x = g(y,p) \longleftrightarrow F(x,y,p)=0$$

podemos diferenciar las dos lados respecto á y (y usar teorema función inverso) para tener $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{p} = g_y(y,p) + g_p(y,p)\cdot\frac{dp}{dy}$

(cuando $p \neq 0$). Cuando $g_p \neq 0$, podemos re-arreglar en la forma:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{1 - p\, g_y(y,p)}{p\, g_p(y,p)}$$

. cualquier solución $p = \sigma(y)$ a este ultima edo, conduce a un solución del edo original en forma de gráfica sobre eje 'x': $x = g(y, \sigma(y))$.

$\boxed{\text{Ejemplo:}}$ $x = 2p + \log(p)$, diferenciamos resp. á y:

$$\Rightarrow \frac{1}{p} = \left(2 + \frac{1}{p}\right)\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow 1 = (2p+1)\frac{dp}{dy} \Rightarrow y = p^2 + p + c.$$

Entonces las curvas parametrizadas:

$$\begin{cases} x = 2t + \log(t) \\ y = t^2 + t + c \end{cases}$$

serían soluciones.

Un más ejemplo de un edo 'famoso' implícita que podemos resolver con las últimas técnicas es:

Ejemplo (Ecuación de Clairaut):

$$(*)\quad \left[\, y = p\cdot x + f(p) \qquad \left\{ p = \frac{dy}{dx} \right] \,\right]$$

como método (1) arriba $(y = f(x,p))$ diferenciamos los dos lados con respecto al x para tener:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx}\cdot x + p + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{dp}{dx}\cdot\left(x + f'(p)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \quad , \quad ó \quad , \qquad x = -f'(p).$$

en el primer caso; $\frac{dp}{dx} = 0$; obtenemos $p = c = cst.$ y substituyendo en $(*)$ las soluciones:

$$y = c\cdot x + f(c) \quad ; \quad c = cst.$$

en el 2'da caso vemos p como parametro, y tenemos la solución dado por la curva parametrizado:

$$(**)\quad x = -f'(t) \quad , \quad y = t\cdot x + f(t) \quad ; \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Comentario: La solución $(**)$ al ecuación de Clairaut es un ejemplo de un tipo de solución mas general ("solución singular") que uno puede obtener por el siguiente proceso; considera las general soluciones a un edo depende por un constante ('c') & que forman un familia de curvas planar que depende por un parametro ('c'). En formulas tendríamos la familia de soluciones por algún formula implicita:

$$\left[\varphi(x,y,c) = 0\right]$$

Un familia de tal curvas planar puede tener un <u>envolvente</u> de la familia de curvas, que es, en particular, tangente a cada curva de la familia en sus puntos de intersección:

Analiticamente, para una familia dado por $\varphi(x,y,c)=0$, su envolvente (cuando existe) seréa dado por eliminando 'c' de las ecuaciones:

$$\left[\varphi(x,y,c)=0\ ;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial c}(x,y,c) = 0\right]$$

Notamos que si las curvas $\varphi(x,y,c)=0$; c: cst. son todos soluciones a algún e.d.o. entonces tambien ~~su~~ envolvente, ya que por definición, tienen las mismas tangentes en sus puntos de intersección.

Ahora hemos visto las principales técnicas básicas asociadas al 1'er orden e.d.o.

fijamos un poco lenguaje para nuestros siguientes temas:

Def: Una función $F: \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ de $n+2$ variables determina una ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA IMPLICITA, de ORDEN n:

$$\left[F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \right]$$

donde $y' = dy/dx, \ldots, y^{(k)} = d^k y/dx^k, \ldots$

un solución a tal e.d.o. es algún función $s: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de un variable, $s(x)$, tal que substitución de $y = s(x)$ resulta en identidad:

$$F(x, s(x), s'(x), \ldots, s^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Un punto regular de tal e.d.o. es donde $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$. Alrededor tal punto la e.d.o. implícita se puede resolver (localmente) para la derivada más alto, para tener un E.D.O. de orden n en FORMA REGULAR:

$$\left[y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}). \right.$$

Principalmente enfocaremos en edos de 2^{da} orden para nuestra siguiente tema.

Tambien tenemos en general:

Def: UNA SISTEMA de 1^{er} orden de e.d.o.'s en las variables $t, x_1, \ldots, x_n$ esta determinado por n funciones de $n+1$ variables como:

$$(*)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

ó, por corto, $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x})$. Un SOLUCIÓN al sistema es una curva parametrizada: $t \mapsto \vec{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ tal que substitución en $(*)$ conduce a una identidad.

Cada edo en forma regular de orden 'n' podemos ver como un caso particular de un sistema en las variables $x, y, p_1, \ldots, p_{n-1}$:

$$\begin{cases} dy/dx = p_1 \\ dp_1/dx = p_2 \\ \vdots \\ \dfrac{dp_{n-2}}{dx} = p_{n-1} \end{cases} \quad , y, \quad \left\{ \dfrac{dp_{n-1}}{dx} = f(x, y, p_1, \ldots, p_{n-1}) \right.$$