

SISTEMAS DINAMICOS I: LINEALIZACIÓN¹

Las curvas integrales de un campo de lineas puede tener formas variadas alrededor un punto singular. Por ejemplo diferentes curvas integrales pueden intersectar en tales puntos (perdemos unicidad). Para estudiar cuales formas o configuraciones parecen, una técnica basica esta en considerar la linealización del campo alrededor tal punto singular (una motivación principal para estudiar sistemas lineales).

Contents

1	puntos singular	2
2	campo vectorial (autonoma)	3
3	linealización	5
A	teoremas de aproximación (optativa)	7

¹Connor Jackman, `connor.jackman@itam.mx`, 9.2026

1 puntos singular

Recordamos:

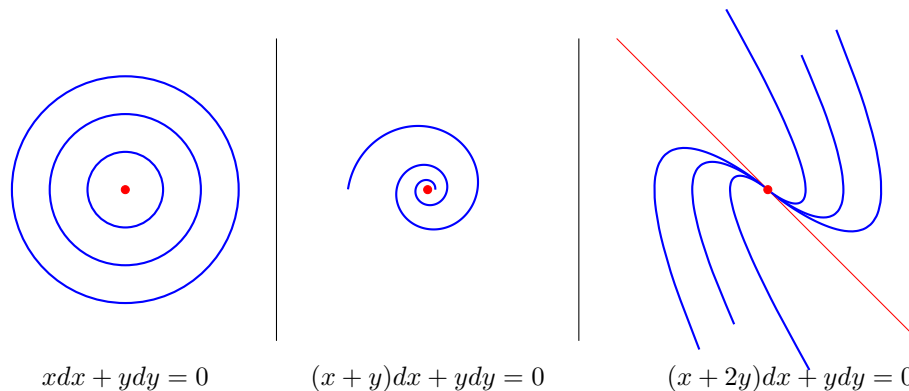
Definition 1. Un punto singular de un campo de líneas planar, $a(x,y)dx + b(x,y)dy = 0$, es un punto $(x_*, y_*) \in \mathbb{R}^2$ donde:

$$a(x_*, y_*) = 0, \quad b(x_*, y_*) = 0.$$

Remark. Que $(a(x,y), b(x,y))$ dirige el normal de la línea del campo en (x,y) , los puntos singulares son justo los puntos donde no hay una línea determinado (cualquiera línea es normal a $(0,0)$).

EJEMPLOS.

Vimos antes unas e.d.o. con puntos singular en el origen como:



Y también por ejemplo $-ydx + xdy = 0$, $ydx + xdy = 0$, $(y - x^2)dx + xdy = 0$, $(y + x^2)dx - xdy = 0$ (verifica que puedes determinar las soluciones de estas ejemplos).

Proponemos la siguiente pregunta general:

CUALES DIFERENTES FORMAS DE CURVAS INTEGRAL PUEDEN PARECER ALREDEDOR UN PUNTO SINGULAR DE UN CAMPO DE LINEAS?

Remark (center-focus problem). Para una situación que ilustra la pregunta arriba esta 'sutil' considera un campo de líneas, $a(x,y)dx + b(x,y)dy = 0$ con:

$$(*) \quad a(x,y) = x + \alpha(x,y), \quad b(x,y) = y + \beta(x,y)$$

donde $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\alpha(x,y), \beta(x,y))}{|(x,y)|} = \mathbf{0}$. Si $\alpha, \beta \equiv 0$ las soluciones son círculos centrado por el origen. Que pasa cuando α, β no son idénticamente cero alrededor el origen? Unas respuestas parcial:

- si a, b son analítica alrededor el origen, entonces las soluciones de (*) pueden parecer círculos, o espirales del origen. Para decidir si siguen como círculos no es resoluble en tiempo finito. Mas preciso para que siguen en la forma de círculos requiere chequear que una secuencia infinita de polinomios, $p_1, p_2, \dots$ en las coeficientes de α, β anulan².
- si a, b son suaves (clase C^∞) pero no analíticas, hay demasiados diferentes formas posibles para perseguir alguna clasificación razonable. Considera³

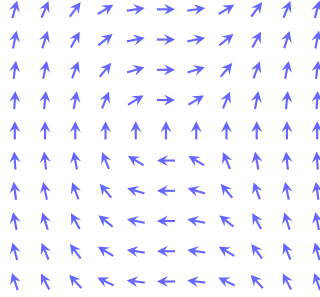
$$(x - f(r^2)y)dx + (y + f(r^2)x)dy = 0$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$, $e f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Sea $K \subset \mathbb{R}$ cualquier conjunto compacto que contiene $0 \in K$. Por ejemplo $K = \{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\}$. Existe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave (funcion de bolto) tal que $f|_K = 0$ y $f|_{K^c} \neq 0$. Solamente círculos de radio $r_* \in K$ son soluciones cerrado de este campo de líneas.

No podemos resistir mencionar que aun para campos de líneas definido con $a(x, y), b(x, y)$ polinomios hay mucho hacer, busca p.ej. problema 16 de Hilbert.

2 campo vectorial (autonoma)

Para pensar sobre el compartamiento de curvas integrales cerca de un punto singular de menudo esta conveniente elegir algun parametrizacion de tales curvas integral. Es decir que puede ser conveniente elegir unas vectores de velocidad que dirigen un dado campo de líneas.



Definition 2. Un campo vectorial sobre el plano asigna un vector a cada punto del plano. En formulas:

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)) = \mathbf{v}(x, y)$$

representando el vector con componentes $(u(x, y), v(x, y))$ en el punto (x, y) .

²Ver p.ej. §4.3, 4.8 de V.I. Arnold, Y. Il'yashenko, *Ordinary Differential Equations, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Dynamical systems I*, (1988).

³Ver p.ej. ch. 2.3 de J. Palis, W. De Melo. *Geometric theory of dynamical systems: an Introduction*. Springer Science & Business Media, (2012).

Remark. Cualquier campo vectorial induce un campo de líneas (las líneas espaneado por los vectores)

$$(u(x, y), v(x, y)) \rightarrow \text{span}\{(u(x, y), v(x, y))\} \longleftrightarrow v(x, y)dx - u(x, y)dy = 0.$$

Puntos singular del campo de líneas corresponden a ceros del campo vectorial (a veces también llamado puntos singular/equilibrio del campo vectorial). Conversamente un campo de líneas no siempre está dirigida globalmente por un campo vectorial continuo. Por ejemplo, con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, e

$$0 = \begin{cases} \sqrt{r-x} dx - \sqrt{r+x} dy & ; \quad y \geq 0, \\ \sqrt{r-x} dx + \sqrt{r+x} dy & ; \quad y \leq 0, \end{cases}$$

(la línea hace medio vuelta en seguirlo alrededor un lazo que contiene el origen).

Campos vectorial y campos de líneas en el plano son similar pero no el mismo. A saber las soluciones (curvas integrales) asociado a un campo de líneas son ciertos curvas planar *no-parametrizadas* mientras las de un campo vectorial son curvas planar con un parametrización distinguida. Formalmente:

Definition 3. Un campo vectorial $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiene asociada el sistema de e.d.o. (autónoma $\equiv$ sin dependencia en ‘tiempo’ t)

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

una curva parametrizada $\mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \mathbf{x}(t)$ es llamado una solución al sistema cuando $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$.

EJEMPLO.

- $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ es una solución del sistema $dx/dt = -y$, $dy/dt = x$ asociada al campo vectorial $(x, y) \mapsto (-y, x)$.

Remark. Para algún factor de re-escalamiento $\mu(x, y) \neq 0$ el campo vectorial $\tilde{\mathbf{v}} = \mu\mathbf{v}$ tiene soluciones que trazan las mismas curvas que los de $\mathbf{v}$, solo con un parametrización diferente. A saber para $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ una solución de $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}$ la reparametrización $\tilde{t} = f(t)$ conduce a solución de $\tilde{\mathbf{v}} = \mu\mathbf{v}$ exactamente cuando

$$\tilde{t} = \int_{t_0}^t \frac{ds}{\mu(\mathbf{x}(s))} + \tilde{t}_0$$

que se denota comunmente como $dt/d\tilde{t} = \mu$ por brevedad (ejercicio: verifica!).

Remark. Curvas parametrizados estudiamos en considerar sus gráficas (‘world lines’): levantamos una curva parametrizado planar, $\mathbf{x} : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}^2$ a su gráfica:

$$\{(t, \mathbf{x}(t)) : t \in \text{dom}(\mathbf{x})\} \subset \mathbb{R}^3$$

que son curvas no parametrizadas, a saber curvas integrales del campo de líneas dirigidos por $(1, \mathbf{v}(x, y))$ y regresamos al situación puramente geometrical por el costo de añadir el parametro distinguido (‘tiempo t ’) como una dimension mas. Esta perspectiva está útil para entender campos vectorial no-autónoma, es decir sistemas mas general como: $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$.

3 linealización

Regresamos a nuestra pregunta original: como parecen las curvas integral de un campo de líneas $a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$ alrededor un punto singular?

Primer hacemos dos computaciones motivacional. Notar que en aplicar un traslacion apropiado, es suficiente consider cuando el punto singular esta ubicado en el origen: $a(0, 0) = 0 = b(0, 0)$.

- Considerando $a(x, y), b(x, y)$ de clase, al menos, C^1 tenemos la expansion

$$(E) \quad (a_1x + a_2y + \alpha(x, y)) dx + (b_1x + b_2y + \beta(x, y)) dy = 0$$

de nuestro campo de líneas alrededor tal punto singular en el origen. Aqui $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\alpha(x,y), \beta(x,y))}{|(x,y)|} = \mathbf{0}$. Es decir, para $\delta > 0$ pon $x = \delta X, y = \delta Y$ donde $|(X, Y)| \leq 1$ estan en el disco unitario. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ apropiada en que tenemos nuestro campo de líneas en las coordenadas re-escaladas en la forma:

$$(a_1X + a_2Y + \varepsilon\bar{\alpha}(X, Y))dX + (b_1X + b_2Y + \varepsilon\bar{\beta}(X, Y)) dY = 0$$

con $|\bar{\alpha}(X, Y)|, |\bar{\beta}(X, Y)| \leq |(X, Y)| \leq 1$ sobre el disco unitario. Que $\varepsilon > 0$ estaba arbitraria, es creible ahora que las curvas integrales cerca del punto singular tienen forma cerca a las curvas integral de la *linealización*:

$$(L) \quad (a_1X + a_2Y)dX + (b_1X + b_2Y) dY = 0$$

(cuando a_j, b_j no son todos cero).

- Consideramos las curvas integral de (E) parametrizado como soluciones del sistema:

$$(E') \quad dx/dt = -(b_1x + b_2y + \beta(x, y)), \quad dy/dt = a_1x + a_2y + \alpha(x, y)$$

o, en notacion vectorial, $d\mathbf{x}/dt = A\mathbf{x} + R(\mathbf{x})$ donde A es la transformación lineal

$$A(x, y) = (-b_1x - b_2y, a_1x + a_2y)$$

y $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{R(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} = \mathbf{0}$. Con la misma re-escalamiento $\mathbf{x} = \delta\mathbf{X}$ donde $|\mathbf{X}| \leq 1$ esta en el disco unitario tenemos para cualquier $\varepsilon > 0$ que hay un $\delta > 0$ apropiada en que las soluciones de (E') en las coordenadas re-escaladas son soluciones del sistema:

$$d\mathbf{X}/dt = A\mathbf{X} + \varepsilon\bar{R}(\mathbf{X})$$

donde $|\bar{R}(\mathbf{X})| \leq 1$ sobre el disco unitario. Que $\varepsilon > 0$ estaba arbitraria, es creible ahora que las curvas integrales cerca del punto singular tienen una forma cerca de las curvas parametrizados por soluciones de la *linealización*:

$$(L') \quad d\mathbf{X}/dt = A\mathbf{X}.$$

Ver §A para mas precisa justificación. Resumiendo:

Definition 4. Un campo de líneas $a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$ con a, b de clase C^1 y punto singular $a(x_*, y_*) = 0 = b(x_*, y_*)$ tiene la linealización alrededor tal punto singular el campo:

$$(a_1X + a_2Y)dX + (b_1X + b_2Y)dY = 0$$

cuando $a_1 = \frac{\partial a}{\partial x}(x_*, y_*)$, $a_2 = \frac{\partial a}{\partial y}(x_*, y_*)$, $b_1 = \frac{\partial b}{\partial x}(x_*, y_*)$, $b_2 = \frac{\partial b}{\partial y}(x_*, y_*)$ no son todos cero, y , $X + x_* = x$, $Y + y_* = y$.

Definition 5. Un campo vectorial $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 y punto singular $\mathbf{v}(\mathbf{x}_*) = 0$ tiene la linealización alrededor tal punto singular la sistema:

$$d\mathbf{X}/dt = A\mathbf{X}, \quad A = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*},$$

(que corresponde al campo vectorial lineal, $\mathbf{X} \mapsto A\mathbf{X}$) con $\mathbf{X} + \mathbf{x}_* = \mathbf{x}$.

Remark. Escribimos $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}_*}$ para el matriz Jacobiana, o diferencial, de $\mathbf{v}$ por el punto $\mathbf{x}_*$. Es decir la aplicacion lineal:

$$\mathbf{u} \mapsto \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \mathbf{v}(\mathbf{x}_* + s\mathbf{u})$$

denotada comunmente como $\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \mathbf{v}(\mathbf{x}_* + s\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*}\right) \cdot \mathbf{u} = (d_{\mathbf{x}_*} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$.
Explicitamente para $\mathbf{v}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ tenemos:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}_*}\right) \cdot (h, k) = \left(h \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{\mathbf{x}_*} + k \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{\mathbf{x}_*}, h \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{\mathbf{x}_*} + k \frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{\mathbf{x}_*}\right).$$

EJEMPLOS.

- $(y - x^2)dx + xdy = 0$ tiene linealización $YdX + XdY = 0$. Cerca al origen las soluciones del sistema original y su linealización tienen la misma forma.
- $(y + x^2)dx - xdy = 0$ tiene linealización $YdX - XdY = 0$. Cerca del origen las soluciones del sistema original y su linealización tienen la misma forma.
- $(x + xy)dx + (y - x^2)dy = 0$ tiene linealización $XdX + YdY = 0$. En cambiar al coordenadas polar vemos que las soluciones cerca al origen del sistema original son todos cerrados mismo que su linealización.
- $(x + x^2)dx + (y + x^2)dy = 0$ tiene linealización $XdX + YdY = 0$. En cambiar al coordenadas polar, y usar metodo de series, vemos que las soluciones cerca al origen del sistema original parecen espirales (foco) en contraste con su linealización.

A teoremas de aproximación (optativa)

Presentamos un resultado valido para campos de lineas en forma normal y dimensiones general, que ‘justifica’ la linealización de campos vectorial planar como caso particular.

Definition 6. Para $t \mapsto \mathbf{x}_*(t)$ una solución particular del sistema clase C^1 :

$$(S) \quad d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}).$$

Llamamos la linealización del sistema (S) alrededor tal solución particular (o las ecuaciones variacional alrededor tal solución) el sistema lineal:

$$(L)_* \quad d\xi/dt = A(t)\xi, \quad (A(t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*(t)}).$$

Remark. Escribimos $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*(t)}$ para el matriz Jacobiana, o diferencial, de $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ con respecto a los variables $\mathbf{x}$ evaluado en $t, \mathbf{x}_*(t)$. Es decir la aplicación lineal:

$$\mathbf{u} \mapsto \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}_*(t) + s\mathbf{u}).$$

Explicitamente para $\mathbf{v}(t, x, y) = (u(t, x, y), v(t, x, y))$ tenemos:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*(t)} \right) \cdot (h, k) = \left(h \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(t, \mathbf{x}_*(t))} + k \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{(t, \mathbf{x}_*(t))}, h \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{(t, \mathbf{x}_*(t))} + k \frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{(t, \mathbf{x}_*(t))} \right).$$

Theorem 1. Sea $t \mapsto \mathbf{x}_*(t)$ una solución particular del sistema clase C^1 :

$$(S) \quad d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}),$$

definido, al menos, para $t \in [0, T]$ algún $T > 0$. Entonces para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que depende por ϵ, T) tal que

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*(t) - \xi(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in [0, T]$$

para cualquier soluciones $\mathbf{x}(t)$ de (S), y $\xi(t)$ de la linealización, $(L)_*$, de (S) alrededor $\mathbf{x}_*(t)$ cuyos condiciones iniciales satisfacen:

$$\mathbf{x}(0) = \xi(0) + \mathbf{x}_*(0), \quad y, \quad |\xi(0)| < \delta.$$

Remark. En el caso particular de un punto de equilibrio, $\mathbf{v}(\mathbf{x}_*) \equiv 0$, de un campo vectorial autonoma tenemos la solución particular constante: $\mathbf{x}_*(t) \equiv \mathbf{x}_*$. La teorema dice en este caso que para un tolerancia de error $\epsilon > 0$, y sobre escala de tiempo finita $T > 0$, las soluciones verdaderos de sistema original quedan entre distancia ϵ de las soluciones a la linealización, al menos cuando sus condiciones inicial comienzan suficientemente cerca (entre distancia $\delta(\epsilon, T)$) al punto singular.

Proof. (sketch.) Como en el anuncio de teorema, sea $\mathbf{x}_*(t)$ una solución particular, definido para $t \in [0, T]$ con $T > 0, \epsilon > 0$ dados. Buscamos un $\delta > 0$ tal que cualquier soluciones $\mathbf{x}(t), \xi(t)$ del sistema original y su linealización resp. con $\mathbf{x}(0) = \xi(0) + \mathbf{x}_*(0)$ y

$$|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_*(0)| = |\xi(0)| < \delta$$

satisfacen la desigualdad anunciado ($|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*(t) - \xi(t)| < \epsilon, \forall t \in [0, T]$).

Para lograr esto, usaremos los siguientes Lemas:

Lemma 1 (Gronwall). Sea $u, v, c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con:

1. u, v son continuos sobre $[a, b]$,
2. c es diferenciable sobre $[a, b]$,
3. $v(t) \leq c(t) + \int_a^t u(s)v(s) ds$

Entonces

$$v(t) \leq c(a)e^{\int_a^t u(s)ds} + \int_a^t c'(s)e^{\int_s^t u(\tau)d\tau} ds, \quad \forall t \in [a, b]$$

Proof. Esto demuestras en la tarea. □

Lemma 2. Para $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ dos soluciones definidos sobre $t \in [t_0, t_1]$ de un sistema $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ con $\mathbf{v}$ localmente Lipshitz en $\mathbf{x}$, entonces existe un constante $L > 0$ tal que

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leq |\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)|e^{L(t-t_0)}$$

para todos $t \in [t_0, t_1]$.

Proof. Que las dos soluciones son continuos, sus imagenes del intervalo compacto $[t_0, t_1]$ son contenidos en algún conjunto compacto $K \supset \{\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) : t \in [t_0, t_1]\}$. Sea $L > 0$ el constante de Lipschitz de $\mathbf{v}$ sobre $[t_0, t_1] \times K$:

$$(*) \quad |\mathbf{v}(t, \mathbf{a}) - \mathbf{v}(t, \mathbf{b})| \leq L|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$$

para todos $t \in [t_0, t_1]$ y $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in K$. Ahora ponemos $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)$. Integrando $\mathbf{z}'(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t)) - \mathbf{v}(t, \mathbf{y}(t))$ tenemos:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(s, \mathbf{x}(s)) - \mathbf{v}(s, \mathbf{y}(s)) ds.$$

Con desigualdad de triangulo y que $|\int \gamma(s)ds| \leq \int |\gamma(s)|ds$, tomando normas de los dos lados (y usando $(*)$) conduce a:

$$|\mathbf{z}(t)| \leq |\mathbf{z}(t_0)| + \int_{t_0}^t L|\mathbf{z}(s)|ds$$

Ahora ponemos $v(t) = |\mathbf{z}(t)|, c(t) = |\mathbf{z}(t_0)|, u(t) = L$ y aplica la Lemma de Gronwall para tener la desigualdad anunciado. □

Ahora recordando que cada funcion de clase C^1 es localmente Lipschitz (p.ej. teorema valor medio componente por componente), podemos usar Lemma 2 para demostrar primer que soluciones con condicion inicial suficientemente cerca a $\mathbf{x}_*(0)$ estan todos al menos definidos tambien para $t \in [0, T]$:

Claim 1. Sea $r > 0$, y pon $K_r = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_*(t)| \leq r, t \in [0, T]\}$, y $L_r > 0$ el constante de Lipschitz de $\mathbf{v}$ sobre $[0, T] \times K_r$. Entonces existe $\delta_r > 0$ tal que cualquier solución de (S) con condicion inicial $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_*(0)| < \delta_r$ esta definido por todos $t \in [0, T]$, y ademas con $\mathbf{x}(t) \in K_r$, $\forall t \in [0, T]$.

A saber, recuerda (teorema de extension, o consecuencia de Picard-Lindelöf) un solucion de $\mathbf{x}' = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ con $\mathbf{v}$ clase C^1 siempre podemos extender mientras tal solucion tiene valor finita. Toma $\delta_r := re^{-L_r T}$ para tener, gracias a Lemma 2, que

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*(t)| \leq \delta_r e^{L_r t} \leq \delta_r e^{L_r T} = r$$

cuando $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_*(0)| \leq \delta_r$. En particular los valores quedan finita (en K) para todos $t \in [0, T]$.

Siguiente, con expansion de Taylor tenemos:

Claim 2. Sea $\epsilon' > 0$. Entonces existe $\delta' > 0$ tal que para $|\mathbf{u}| < \delta'$ tenemos

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}_*(t) + \mathbf{u}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}_*(t)) + A(t)\mathbf{u} + R(t, \mathbf{u})$$

con $|R(t, \mathbf{u})| < \epsilon'|\mathbf{u}|$, $\forall t \in [0, T]$.

Que solo es una manera de escribir la condicion que para cada $t \in [0, T]$ los restos en la expansion de Taylor tienen $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{R(t, \mathbf{u})}{|\mathbf{u}|} \rightarrow \mathbf{0}$ y usar la compactidad de $[0, T]$.

Ahora ponemos

$$\mathbf{z}(t) := \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*(t) - \xi(t)$$

para que queremos mostrara $|\mathbf{z}(t)| < \epsilon$, $\forall t \in [0, T]$ cuando $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_*(0) + \xi(0)$ esta suficientemente cerca a $\mathbf{x}_*(0)$. Notar que para estas condiciones iniciales tenemos $\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$. Calculamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t)) - \mathbf{x}'_*(t) - A(t)\xi(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}_*(t) + \xi(t) + \mathbf{z}(t)) - \mathbf{x}'_*(t) - A(t)\xi(t) \\ &= \mathbf{v}(t, \mathbf{x}_*(t)) + A(t)(\xi(t) + \mathbf{z}(t)) + R(t, \xi(t) + \mathbf{z}(t)) - \mathbf{x}'_*(t) - A(t)\xi(t) \\ &= A(t)\mathbf{z}(t) + R(t, \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*(t)). \end{aligned}$$

Ahora integrando (y recuerda $\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$) tenemos:

$$\mathbf{z}(t) = \int_0^t A(s)\mathbf{z}(s) + R(s, \mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_*(s)) ds$$

y tomando valores absolutos de los dos lados:

$$(*)' \quad |\mathbf{z}(t)| \leq \int_0^t |A(s)\mathbf{z}(s)| + |R(s, \mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_*(s))| ds.$$

Usando de nuevo Lemma 2 y los Claims arriba, obtenemos:

Claim 3. Sea $\epsilon' > 0$. Entonces existe $\delta'' > 0$ tal que $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_*(0)| < \delta''$ implica

$$|\mathbf{z}(t)| \leq \epsilon' r t + \int_0^t a |\mathbf{z}(s)| ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

donde $a = \sup\{|A(s)\mathbf{u}| : s \in [0, T], |\mathbf{u}| = 1\}$.

A saber toma cualquier $0 < \delta'' < \min\{\delta_r, \delta' e^{-LT}\}$ donde δ_r esta en Claim 1 y $\delta' > 0$ como en Claim 2. Entonces, gracias a Lemma 2 tenemos $|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_*(s)| \leq \delta'' e^{Lt} < \delta'$ para todos $t \in [0, T]$, y ahora con Claim 2 y la definicion de $a = \sup\{|A(s)\mathbf{u}| : s \in [0, T], |\mathbf{u}| = 1\}$ la desigualdad $(*)'$ esta la anunciado de Claim 3:

$$(*)'' \quad |\mathbf{z}(t)| \leq \int_0^t a |\mathbf{z}(s)| + \epsilon' |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_*(s)| ds \leq \epsilon' r t + \int_0^t a |\mathbf{z}(s)| ds.$$

Ahora aplica la Lemma de Gronwall 1 a $(*)''$ con $v(t) = |\mathbf{z}(t)|$, $c(t) = \epsilon' r t$, $u(t) = a$ para tener que, a cualquier $\epsilon' > 0$, que existe un $\delta'' > 0$ tal que $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_*(0)| < \delta''$ implica:

$$|\mathbf{z}(t)| \leq \epsilon' r \frac{e^{at} - 1}{a} \leq \epsilon' r \frac{e^{aT} - 1}{a}, \quad \forall t \in [0, T]$$

(Notar: cuando $a = 0$ tenemos $|\mathbf{z}(t)| \leq \epsilon' r t \leq \epsilon' r T$). Nuestro resultado deseado sigue en tomar $\epsilon' = \frac{a\epsilon}{r(e^{aT}-1)}$ (o $\epsilon' = \frac{\epsilon}{rT}$ cuando $a = 0$). $\square$