§6: Teoremas de Existencia y Unicidad (series)

Consideramos condiciones sobre un e.d.o. (ó una sistema de e.d.o.) que aseguran que soluciones existen, y ademas que en prescribir su valor inicial que tal solución sería única.

Presentaremos dos tal teoremas y delinear sus demonstraciones, ya que tales demonstraciones son su mismo útil en el sentido que consiste en definir UNA SECUENCIA apropiado de funciones que aproximan la solución que buscamos. Las detalles de las demonstraciones consiste en establecer que estas secuencias de funciones si converge, y ademas que su limite entonces sería nuestro solución que buscamos. Las dos tecnicas que consideraremos serían:

1) series de poder (soluciones analiticas)

2) ecuaciones integral (iteración de PICARD-LINDELÖF)

Soluciones Analiticas

Primer consideramos la tecnica de buscar expansiones de soluciones por buscando sus expansiones en series de poder.

Ejemplos:

1) $y' = y$. Aqui ya sabemos las soluciones: $y = y_0 e^x$.

recuperamos tal solucion en la siguiente manera.

Notamos que en saber el valor inicial $y(0) = y_0$, la ecuación diferencial determinan todos las derivadas de orden superior de un solución:

$$y'(0) = y_0.$$

diferenciamos el edo $\to$ $y'' = y' \to$

$$y''(0) = y'(0) = y_0,$$

... etc... entonces un solución (si existe) necesariamente tiene todos sus derivadas determinados cuando sabemos su valor inicial [inducción $\Rightarrow y^{(n)}(0) = y_0$].

Su serie de poder entonces es completamente determinada:

$$y(x) = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \ldots + y_k x^k + \ldots$$

con $y_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!} = \frac{y_0}{k!}$ para que:

$$y(x) = y_0\left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \ldots\right) = y_0 e^x$$

igual como antes.

Nota: metodo alternativa para obtener la serie de solucion buscado es por substitución:

$$y(x) = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \ldots$$

en el edo $y' = y$ para tener:

$$y_1 + 2y_2 x + 3y_3 x^2 + \ldots = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \ldots$$

y poner igual coeficientes tenemos:

$$y_1 = y_0,\ 2y_2 = y_1,\ 3y_3 = y_2, \ldots,\ n y_n = y_{n-1}, \ldots$$

para que de nuevo: $k!\, y_k = y_0$.

---

2) considera la sistema 1er orden:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

equivalente al edo 2do orden:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = -y \qquad \left(\text{con } x = \frac{dy}{dt}\right)$$

ahora cuando sabemos los valores inicial

$$y(0) = y_0\ ,\ y\ ,\ y'(0) = y_0' = x_0$$

la ecuación diferencial determinan todos las derivadas de orden superior:

$$y''(0) = -y_0$$

diferenciamos el edo $\to y''' = -y' \to y'''(0) = -y_0' = -x_0$

... etc... y obtenemos (inducción):

$$y(t) = y_0\left(1 - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{4!}t^4 - \ldots\right) + y_0'\left(t - \tfrac{1}{3!}t^3 + \tfrac{1}{5!}t^5 + \ldots\right)$$

$$= y_0 \cos t + x_0 \sin t$$

$$\to x(t) = \frac{dy}{dt} = -y_0 \sin t + x_0 \cos t.$$

---

3) Igual cuando no reconocemos las series de poder, la misma método aplican para determinar iterativamente las coeficientes del serie de nuestro solución candidato:

$$y' = x^2 + y^2$$

un solucion con valor inicial $y(0) = y_0$ necesariamente iba a tener serie de poder alrededor $x=0$ con:

$$y_1 + 2y_2 x + 3y_3 x^2 + \ldots = x^2 + (y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \ldots)^2$$

$$\begin{aligned} = x^2 + y_0^2 + y_0 y_1 x + y_0 y_2 x^2 + \ldots \\ + y_1 y_0 x + y_1^2 x^2 + \ldots \\ + y_2 y_0 x^2 + \ldots \\ + \ldots \end{aligned}$$

que poniendo igual los primeros coeficientes conduce a:

$$y_1 = y_0^2$$

$$2y_2 = 2y_1 y_0 = 2y_0^3$$

$$3y_3 = 1 + y_1^2 + 2y_2 y_0 = 1 + y_0^4 + 2y_0^4 = 1 + 3y_0^4$$

y tenemos la expansion hasta orden 3:

$$y(x) = y_0 + y_0^2 x + y_0^3 x^2 + \left(\tfrac{1}{3} + y_0^4\right)x^3 + \ldots$$

donde podemos encontrar terminos de mas alta orden por las formulas recursivas:

$$(k+1)\, y_{k+1} = \sum_{j=0}^{k} y_j\, y_{k-j} \qquad \text{para } k \geq 3.$$

---

4) Considera:

$$x^2 y' + y = x$$

esta es un ecuación lineal que podemos resolver con factor integrante para tener solución hasta quadratura:

$$y = e^{1/x}\left(\int \frac{dx}{x e^{1/x}} + c\right)$$

Alternativamente, podemos buscar solución por serie de poder:

$$x^2(y_1 + 2y_2 x + 3y_3 x^2 + \ldots) + (y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \ldots) = x$$

$$\Rightarrow y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 + y_1 = 0,\ 2y_2 + y_3 = 0,$$

$$\ldots,\ k y_k + y_{k+1} = 0, \ldots$$

$$\Rightarrow y_k = (-1)^{k-1}\cdot(k-1)!$$

$$\Rightarrow y(x) = x - x^2 + 2x^3 - 3!\,x^4 + 4!\,x^5 - \ldots$$

que es una serie divergente para cualquier $x \neq 0$.

Como los ultimas ejemplos ilustran el método de expansiones es a veces no tan practico por computación por mano aparte de los primeros terminos (general formulas recursivas son un poco más practical dar a un computador). Mas serio es que en general no podemos estar seguro que las series que obtenemos son en general convergentes. Esta de interes dar condiciones para que las series formal que obtenemos por repetetivamente diferenciación del e.d.o. convergen:

Teorema (Cauchy): Dado una sistema de e.d.o's:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x})$$

con $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{f}: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ analitica por el punto $(t_0, \vec{x}_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ [es decir cada componente admete un expansion en serie de poder convergente alrededor $(t_0, \vec{x}_0)$]

Entonces, existe única solución

$$\vec{x} = \vec{s}(t)$$

al sistema con condición inicial $\vec{s}(t_0) = \vec{x}_0$ definido en algún intervalo alrededor t_0, y, ademas que $\vec{s}(t)$ es analitica por t_0 [componentes de $\vec{s}(t)$ admeten expansiones en series de poder convergentes alrededor t_0].

Comentario: Este teorema admete varias generalizaciones en establecer dependencia de soluciones analiticas por parametros ó por valores iniciales. Tambien es posible extender la teorema a ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales parciales (e.d.p.), la teorema Cauchy-Kowalevskaya.

---

demonstración ("sketch"): consideramos el caso de un e.d.o. 1er orden:

$$dy/dx = p(x,y)$$

el caso de una sistema 1er orden procede igual, solo con mas complicados de notación (indeces).

También sin perder generalidad suponemos que $p(x,y)$ es analitica alrededor $x=0, y=0$, ya que reducimos al este caso en cambio de variables por translacion: $x = X + x_0$, $y = Y + y_0$.

Entonces consideramos $y' = p(x,y)$ con $p(x,y)$ analitica por $x = y = 0$ y queremos mostrar que admete solución $y = s(x)$ con $s(0) = 0$, y $s(x)$ analitica por $x = 0$.

Hemos mencionado arriba que en diferenciar repetetivamente el e.d.o. podemos determinar las derivadas de cualquier orden de nuestro solucion que buscamos. Explicitamente, por inducción se puede mostrar:

Lemma: Si $y = s(x)$ es solución á $y' = p(x,y)$ con $s(0) = 0$, entonces sus derivadas de cualquier orden son determinados recursivamente por las formulas:

$$s^{(k)} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{(k-2)}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k-2}{j-1} s^{(j)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{(k-j-1)}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)$$

donde $\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$, y evaluamos (despues expandir) por $x=0, y=0$.

por ejemplo los primeros terminos tenemos como:

$$s^{(1)} = p$$

$$s^{(2)} = p_x + s^{(1)} p_y = p_x + p\,p_y$$

$$\begin{aligned} s^{(3)} &= \frac{d}{dx}(p_x) + s^{(2)} p_y + s^{(1)} \frac{d}{dx}(p_y) \\ &= p_x + p\,p_y + s^{(2)} p_y + s^{(1)}(p_{yx} + p\,p_{yy}) \end{aligned}$$

$$s^{(4)} = \frac{d^2}{dx^2}(p_x) + s^{(3)} p_y + 2s^{(2)} \frac{d}{dx}(p_y) + s^{(1)} \frac{d^2}{dx^2}(p_y), \ldots$$

que se puede evaluar en $x = y = 0$ para tener derivadas de cualquier orden de $s(x)$ en $x = 0$.

---

(1) La consequencia mas relevante de la Lemma no es tanto su formula exacto, pero el hecho clave sería que las derivadas $s^{(k)}(0)$ del solución que buscamos son determinadas por ciertos POLINOMIOS en las coeficientes del expansión de $p(x,y)$. Ademas, estas polinomios tienen COEFICIENTES POSITIVAS (se establece con inducción).

por ejemplo, escribiendo:

$$p(x,y) = p_{00} + p_{10}x + p_{01}y + p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2 + \ldots$$

tenemos:

$$s^{(1)}(0) = p_{00}$$

$$s^{(2)}(0) = p_{10} + p_{00}\cdot p_{01}$$

$$s^{(3)}(0) = p_{10} + p_{00}\cdot p_{01} + (p_{10} + p_{00}p_{01})p_{01} + p_{00}\cdot(p_{11} + p_{00}\cdot 2p_{02})$$

... etc...

Regresando a nuestro demonstración, ahora sabemos que las coeficientes, $s_k = s^{(k)}(0)/k!$, en

(*) $[s(x) = s_1 x + s_2 x^2 + \ldots$

del expansión que buscamos son única determinados por las coeficientes

$$p_{jk} = \frac{1}{j!\,k!}\frac{\partial^{j+k} p}{\partial x^j \partial y^k}(0,0),$$ en la expansión de

(**) $[p(x,y) = p_{00} + p_{10}x + p_{01}y + \ldots$

Entonces queda mostrar que la convergencia del serie (**) implica la convergencia de la serie (*).

Para hacer esto usamos tecnica de Cauchy de "MAJORANTS", que en la situación presente consistiría en prueba de comparición: vamos producir un serie convergente:

$$S(x) = S_1 x + S_2 x^2 + \ldots$$

con $|s_j| \leq S_j$ que implica la serie (*) converge.

Para producir este serie, considera que convergencia de (**) $[p(x,y)]$ implica que existe algún $\xi > 0, \eta > 0$ t.q.

$$p(\xi, \eta) = p_{00} + p_{10}\xi + p_{01}\eta + \ldots = \sum p_{jk}\xi^j\eta^k$$

converge. En particular, al menos, sus terminos son acotados:

$$|p_{jk}|\,\xi^j\eta^k \leq M, \quad \text{algún constante } M > 0.$$

Ahora observamos que la serie:

$$\sum \frac{M}{\xi^j\eta^k} x^j y^k = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{\xi}\right)\left(1 - \frac{y}{\eta}\right)} = P(x,y)$$

es convergente alrededor $x=0, y=0$ y sus coeficientes

$$P_{jk} = M/\xi^j\eta^k$$ todos tienen (por construcción)

(2) $$\boxed{P_{jk} \geq |p_{jk}|}$$

Considera la solución $S(x)$ á $y' = P(x,y)$ con $S(0)=0$:

$$S(x) = \eta\left(1 - \sqrt{1 + 2M\frac{\xi}{\eta}\log\left(1 - \frac{x}{\xi}\right)}\right)$$

que es en particular analitica por $x = 0$, entonces su serie de poder $S(x) = S_1 x + S_2 x^2 + \ldots$

es convergente.

Ahora recordamos (1) que estas coeficientes S_k son determinados por ciertos POLINOMIOS en las coeficientes $P_{\ell m}$ con coeficientes POSITIVAS. Las mismas polinomios en susituir las coeficientes $p_{\ell m}$ para $P_{\ell m}$ determina los coeficientes s_k.

(*) NOTAR: para $Q(X)$ un polinomio en $X = (X_1, \ldots, X_n)$ con coeficientes positivas, y $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ con $|X_j| \leq Y_j$ tenemos:

$$|Q(X)| = \left|\sum Q_\alpha X^\alpha\right| \leq \sum |Q_\alpha X^\alpha| \underset{Q_\alpha \geq 0}{=} \sum Q_\alpha |X^\alpha| \leq \sum Q_\alpha Y^\alpha = Q(Y)$$

ahora aplicando el principio (*) a los polinomios en $P_{\ell m}$ que determinan S_k y usando (2): $|p_{\ell m}| \leq P_{\ell m}$, obtenemos:

$$|s_k| \leq S_k$$

y la convergencia del serie $S(x) = S_1 x + S_2 x^2 + \ldots$ implica finalmente la de serie $s(x) = s_1 x + s_2 x^2 + \ldots$ por comparicion $\square$

NOTAR: la demonstracion establece estimaciones por el radio de convergencia de nuestro serie de poder para la solución $s(x)$ en terminos de region de convergencia de $p(x,y)$ [las constantes $\xi > 0, \eta > 0, M > 0$ en la demonstración determina el radio de convergencia de $S(x)$ que controla la de $s(x)$].