

SISTEMAS DINAMICOS I: SISTEMAS LINEAL AUTONOMA¹

Aqui consideramos los sistemas lineal que entendemos lo mas completa: sistemas lineal autonoma

$$d\mathbf{x}/dt = A\mathbf{x}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, y $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal.

Contents

1	terminologia y estrategia general	2
2	ejemplos	4
2.1	sistemas lineal orden 2	4

¹Connor Jackman, connor.jackman@itam.mx, 10.2026

1 terminologia y estrategia general

Sistemas lineal tienen un rol central en los sistemas dinámicos, por consecuencia tienen el siguiente lenguaje estándar:

Definition 1. Una sistema lineal autónoma en $\mathbb{R}^n$ es una sistema de e.d.o. 1'er orden en la forma:

$$d\mathbf{x}/dt = A\mathbf{x}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal.

Definition 2. Una sistema lineal no-autónoma en $\mathbb{R}^n$ es una sistema de e.d.o. 1'er orden en la forma:

$$d\mathbf{x}/dt = A(t)\mathbf{x}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y, para cada $t \in \mathbb{R}$, $A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal (que depende por t en una manera no trivial).

Definition 3. Una sistema lineal no-homogénea (y no-autónoma) en $\mathbb{R}^n$ es una sistema de e.d.o. 1'er orden en la forma:

$$d\mathbf{x}/dt = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y, para cada $t \in \mathbb{R}$, tenemos $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ (no idénticamente cero) y $A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ alguna transformación lineal.

Sistemas de e.d.o. lineal tienen las siguientes propiedades útiles:

Proposition 1. Para un sistema lineal general: $d\mathbf{x}/dt = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, cualquier dos soluciones $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$ tienen diferencia una solución al correspondiente sistema homogénea, es decir:

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_h(t)$$

donde $\mathbf{x}_h(t)$ es alguna solución de $d\mathbf{x}/dt = A(t)\mathbf{x}$. Cuando $A(t), \mathbf{b}(t)$ son definidos para todos $t \in \mathbb{R}$ y continuo en t , entonces soluciones con cualquier valor inicial existen y son únicas. Además son definidos para todos $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 2. Para un sistema lineal homogénea $d\mathbf{x}/dt = A(t)\mathbf{x}$ (donde $A(t)$ puede ser autónoma, o, no-autónoma), el espacio de soluciones son un espacio vectorial. Es decir, para cualquier dos soluciones $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$ y $c_j \in \mathbb{R}$ entonces también

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$$

sería una solución de $d\mathbf{x}/dt = A(t)\mathbf{x}$.

Proposition 3. Para un sistema lineal autónoma $d\mathbf{x}/dt = A\mathbf{x}$, los espacios propios de A son invariantes. Es decir una solución que comience con valor inicial en un espacio propio de A , queda por todo tiempo en el mismo espacio propio de A .

Proof. Para el primer, notamos que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, esta localmente Lipschitz en $\mathbf{x}$ (cuando $A(t), \mathbf{b}(t)$ son continuo en t) y aplica la teorema de Picard-Lindelöf para que soluciones existen y son únicas, al menos para algún intervalo de tiempo. Para ver que son definidos para todo el tiempo notamos que la solucion equilibrio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ esta definido para todo el tiempo, entonces por unicidad de soluciones esta suficiente considerar una solucion con $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$ en todo su dominio de existencia donde queremos ver que $\mathbf{x}(t)$ queda finita (mientras queda finita, Picard-Lindelöf permita siempre extender su dominio de definicion). Entonces ponemos $\nu(t) = |\mathbf{x}(t)| \in \mathbb{R}_{>0}$ y queremos ver que $\nu(t)$ esta definido para todo el tiempo (que no escapa al infinito). A saber tenemos:

$$\nu' = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|} \implies |\nu'| \leq |\mathbf{x}'| \leq \alpha(t)\nu + \beta(t)$$

donde $\alpha(t) = \sup\{A(t)\mathbf{v} : |\mathbf{v}| = 1\}$. Aplicando teorema de comparacion (con la edo 1'er orden lineal arriba) tenemos que $\nu(t)$ esta finita y definido para todo el tiempo y entonces tambien $\mathbf{x}(t)$.

Para las siguientes propiedades, mas algebraicas, ponemos $\mathbf{x}_h(t) = \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)$ y tenemos $\mathbf{x}'_h(t) = \mathbf{x}'_2(t) - \mathbf{x}'_1(t) = A\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}(t) - A\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{b}(t) = A\mathbf{x}_h(t)$. Para la segunda, tenemos: $c_1\mathbf{x}'_1(t) + c_2\mathbf{x}'_2(t) = c_1A(t)\mathbf{x}_1(t) + c_2A(t)\mathbf{x}_2(t) = A(t)(c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t))$. Para el tercer sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un espacio propio de A . En particular $A(E) \subset E$. Entonces la e.d.o. restringida:

$$d\xi/dt = A|_E\xi, \quad \xi \in E, \quad A|_E : E \rightarrow E$$

es lineal y autonoma. Una solucion de tal e.d.o. restringida $\xi(t) \in E \subset \mathbb{R}^n$ es tambien una solucion del e.d.o. original (y queda por todo el tiempo en E). Por unicidad de soluciones del sistema original, cualquier solucion con condicion inicial en E coincide con algun solucion de esta sistema restringida y entonces tambien va a quedar para todo el tiempo en E . $\square$

Usando las propiedades arriba tenemos el siguiente estrategia para entender sistemas lineales:

1. Si el sistema no es homogenea, buscamos algún solución particular $\mathbf{x}_p(t)$. Segun proposicion 1, para obtener cualquier otra solucion seria suficiente entender el sistema homogenea correspondiente.
2. Para un sistema homogenea buscamos varias soluciones con condiciones iniciales independientes. Gracias a proposicion 2, cualquier combinacion lineal de tales soluciones tambien seria solucion. En particular si logramos encontrar n soluciones independientes, $\mathbf{x}_j(t)$, a un sistema lineal en $\mathbb{R}^n$ la solucion general seria (unicidad de soluciones) de la forma:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \dots + c_n\mathbf{x}_n(t)$$

para unos constantes $c_j \in \mathbb{R}$ (determinada por la condicion inicial).

3. Para un sistema autonoma (y homogenea), buscamos soluciones en restringir nuestro atencion a los espacio propios de A que serian sistemas lineal de dimensiones inferior (y, por consecuencia mas sencillos).

2 ejemplos

2.1 sistemas lineal orden 2

Consideramos sistemas lineales autonomas en el plano: $d\mathbf{x}/dt = A\mathbf{x}$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Como vimos arriba el analisis de tales sistemas reduce a describir los espacios propios de la transformacion lineal $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

1. Suponer que A tiene dos valores propios real, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con propios vectores independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. En este base, A es diagonal (y la sistema es desacoplada y seria facil de resolver). Mas preciso podemos observar que para cada par $\lambda_j, \mathbf{v}_j$ tenemos un sistema 1-dimensional, a saber para que $\mathbf{x}(t) = x(t)\mathbf{v}_j$ seria solucion en esta espacio propio necesitamos:

$$\mathbf{x}' = x' \mathbf{v}_j = A(\mathbf{x}) = xA(\mathbf{v}_j) = \lambda_j x \mathbf{v}_j \iff x' = \lambda_j x \iff x = C e^{\lambda_j t}$$

o, en resumen que tenemos las soluciones particular:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2.$$

Ya que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ son un base, la solucion general seria de la forma:

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{x}_1(t) + C_2 \mathbf{x}_2(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

que podemos analizar/dibujar dependiendo de los signos de los λ_j .

Cuando los valores propios son real y distintos, siempre tenemos este caso diagonalizable. Es decir en el base de vectores propios, es decir las coordenadas:

$$X \mathbf{v}_1 + Y \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$$

la transformacion lineal A esta dado por el matriz diagonal $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, y entonces la sistema en esta base tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

2. Suponer que A tiene un valor propio real repetida $\lambda_* \in \mathbb{R}$ con solo un propio vector: $A\mathbf{v}_* = \lambda_* \mathbf{v}_*$. El mismo como antes obtenemos una solucion particular: $\mathbf{x}_*(t) = e^{\lambda_* t} \mathbf{v}_*$ a lo largo este espacio propio (linea).

Para obtener la solucion general (como combinacion lineal de soluciones particulares) requerimos otra solucion independiente de $\mathbf{x}_*(t)$. Para esto, la estrategia mas comun es poner la matriz en forma normal de Jordan (con vector propio generalizado). Es decir calculamos un $\mathbf{u}_*$ tal que

$$A\mathbf{u}_* = \lambda_* \mathbf{u}_* + \mathbf{v}_*$$

y buscamos una solucion en este base:

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{v}_* + Y(t)\mathbf{u}_*$$

seria una solucion cuando:

$$X' \mathbf{v}_* + Y' \mathbf{u}_* = (\lambda_* X + Y) \mathbf{v}_* + Y \lambda_* \mathbf{u}_* \implies X' = \lambda_* X + Y, Y' = \lambda_* Y$$

que resolvemos en etapas: primer $Y = Ce^{\lambda_* t}$, y segundo la solucion del edo lineal $X' = \lambda_* X + Ce^{\lambda_* t}$ es $X = (Ct + B)e^{\lambda_* t}$ para la solucion general:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_* t} (C_1 \mathbf{v}_* + C_2 (\mathbf{u}_* + t \mathbf{v}_*)) \quad (1)$$

En resumen en el base de vectores propios/vectores propios generalizados, es decir las coordenadas:

$$X \mathbf{v}_* + Y \mathbf{u}_* \in \mathbb{R}^2$$

la transformacion lineal A esta dado por un bloque de Jordan, y entonces la sistema en esta base tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_* & 1 \\ 0 & \lambda_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

con soluciones general de eq. (1) (es decir $X = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_* t}, Y(t) = C_2 e^{\lambda_* t}$).

3. Suponer que A tiene valores propios complejas (con parte imaginaria no cero). Que las entradas de A son real, su polinomio caracteristica tiene coeficientes real y entonces sus raices estan conjugadas:

$$\lambda_{\pm} = a \pm ib \quad (\bar{\lambda}_+ = \lambda_-)$$

con $b \neq 0$. Para encontrar las soluciones en la misma manera como antes, pasamos por un momento a permitir todos los variables ser complejas (complexificamos la sistema). Despues encontrar las soluciones con variables complejas, tomamos combinaciones apropiadas para tener soluciones real al problema original. Entonces sea

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

y considera $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $Z \mapsto AZ = \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix}$ con la sistema lineal compleja:

$$(*) \quad Z' = AZ$$

Tenemos ahora dos vectores propios complejas:

$$AV_{\pm} = \lambda_{\pm} V_{\pm}$$

que, igual como antes, generan soluciones

$$Z_{\pm}(t) = e^{\lambda_{\pm} t} V_{\pm}, \quad (e^{\lambda_{\pm} t} = e^{at} e^{\pm ibt} = e^{at} (\cos bt \pm i \sin bt)).$$

Para regresar a soluciones reales, notamos que aun la sistema (*) es lineal entonces tambien combinaciones lineales de sus soluciones siguen soluciones. En particular veremos que podemos sacar las partes real/imaginarias de $Z_{\pm}$ para obtener soluciones real al sistema original.

Entonces dividimos en partes real y imaginario, escribiendo:

$$V_{\pm} = \mathbf{u} \pm i\mathbf{v}$$

donde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ satisfacen:

$$A\mathbf{u} \pm iA\mathbf{v} = (a \pm ib)(\mathbf{u} \pm i\mathbf{v}) = (a\mathbf{u} - b\mathbf{v}) \pm i(a\mathbf{v} + b\mathbf{u})$$

es decir $A\mathbf{u} = a\mathbf{u} - b\mathbf{v}$, $A\mathbf{v} = b\mathbf{u} + a\mathbf{v}$. En particular vemos que $\bar{V}_+ = V_-$ y entonces

$$\bar{Z}_+(t) = Z_-(t).$$

Recuerda que el parte real/imaginaria de un variables compleja esta una combinacion del variable con su conjugado asi:

$$Re(Z_+) = \frac{Z_+ + \bar{Z}_+}{2}, \quad Im(Z_+) = \frac{Z_+ - \bar{Z}_+}{2i}$$

entonces tambien $Re(Z_+) = \frac{Z_+ + Z_-}{2}$, $Im(Z_+) = \frac{Z_+ - Z_-}{2i} \in \mathbb{R}^2$ serian soluciones reales del sistema original. Haciendo la multiplicacion:

$$e^{at}(\cos bt + i \sin bt)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = e^{at}(\cos bt \mathbf{u} - \sin bt \mathbf{v}) + ie^{at}(\cos bt \mathbf{v} + \sin bt \mathbf{u})$$

y, por consecuencia las dos soluciones reales:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{at}(\cos bt \mathbf{u} - \sin bt \mathbf{v}), \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{at}(\cos bt \mathbf{v} + \sin bt \mathbf{u}) \quad (2)$$

al sistema original (para solucion general $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$).

En resumen, en el base $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ por partes real/imaginaria de un vector propio compleja ($V_+ = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$), es decir las coordenadas

$$X\mathbf{u} + Y\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$$

la transformacion lineal A esta en forma normal, con la sistema:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

con solucion general generado por las soluciones de eq. (2) (es decir $X_1(t) = e^{at} \cos bt$, $Y_1(t) = -e^{at} \sin bt$, y $X_2(t) = e^{at} \sin bt$, $Y_2(t) = -e^{at} \cos bt$).