§7: Teoremas Existencia y Unicidad (Picard-Lindelöf)

Ahora consideramos otra técnica para producir una secuencia de funciones que aproximan la solución que buscamos.
La tecnica va a aplicar a más amplia clase de e.do's que solo las analiticas, y su demonstración será mas interesante (conceptual). Al contrario a series de poder que tenemos acceso directo a la secuencia de aproximaciones por formulas recursivas, las formulas recursivas que definen nuestro secuencia de Picard-Lindelöf no son tan facil calcular directamente.

Para motivar el algoritmo consideramos un edo 1ᵉʳ orden:

$$(1)\quad \left[\frac{dy}{dx} = p(x,y) \qquad y(x_0) = y_0\right]$$

es tentador integrar los dos lados y escribir:

$$(2)\quad \left[y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} p(x,y)\,dx\right]$$

que, desafortunadamente, no nos dice que es "$y(x)$" debida a que es auto-referencial (es necesario saber $y(u)$ en $[x_0,x]$ para evaluar la integral: $\int_{x_0}^{x} p(u,y(u))\,du$).

Aún, la ecuación (2) [que es un ejemplo de un Ecuación Integral] puede ser útil. A saber nos dice que la solución del e.d.o. que estamos buscando necesariamente satisfacerá la ecuación integral (2) (y conversamente).

La esquema de las iteraciones de Picard-Lindelöf esta basado en la reformulación de buscar soluciones en la ecuación integral arriba por las siguientes observaciones:

1) $y = s(x)$ es solución al edo $y' = p(x,y)$ con $y(x_0) = y_0$

$$\iff \quad s(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} p(u, s(u))\,du$$

2) Dado cualquier función integrable, $f(x)$, podemos definir un nuevo función, Φf, por:

$$(\Phi\cdot f)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} p(u, f(u))\,du$$

en otras palabras, Φ es un operador que tome ciertas funciones f, y produce otras funciones:

$$f \longmapsto \Phi\cdot f$$

(ahorita vamos tener que tomar cuidado con el dominio/codiminio de Φ).

3) Combinando 1), y 2) vemos la reformulación de problema de encontrar un solución al nuestro e.do. es equivalente a encontrar un Punto Fijo del operador Φ [buscamos algún $s(x)$ tal que $\Phi\cdot s = s$].

La manera en que vamos establecer la existencia (y unicidad) de tal punto fijo [bajo adecuadas condiciones sobre $p(x,y)$] es de su propio interes, ya que aplica en gran variedad de situaciones:

Teorema (transformación de contracción):

Sea X un espacio metrica completa con distancia

$$d(x,y) = |x-y|$$

(p.ej: $X = \mathbb{R}^n$, con $|\cdot|$ la norma Euclideana). Un función:

$$f: X \longrightarrow X$$

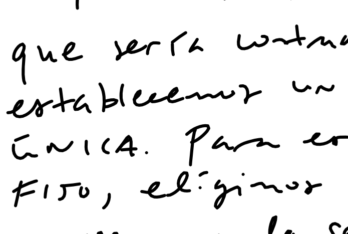
tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x-y|, \quad \forall x,y \in X$$

y algún constante $\lambda \in (0,1)$ llamamos un transformación de contracción de X. Entonces:

[Cada transformación de contracción de un espacio metrica completa tiene única punto fijo: $\exists!\, x_* \in X$ tal que $f(x_*) = x_*$.]

Comentario: Este teorema es nuestro primer resultado en la dinamica discreta (iteración de algún transformación)



demonstración: Primer notamos que si un punto fijo existe, entonces será única: suponer $x_1, x_2 \in X$ son dos puntos fijos entonces:

$$|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| \leq \lambda |x_1 - x_2| \overset{\lambda\in(0,1)}{<} |x_1 - x_2|$$

que sería contradicción si $x_1 \neq x_2$. Entonces cuando establecemos un punto fijo existe, necesariamente será única. Para establecer la existencia de tal punto fijo, eligimos cualquier punto inicial $x_0 \in X$ y consideramos la secuencia:

$$(*)\quad \left[x_0,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), \ldots,\ x_{n+1} = f(x_n), \ldots\right.$$

Vamos demostrar esta secuencia es Cauchy y entonces, debido a que X es completa, converge.
Notando que transformaciones de contracción son continuos, tenemos que este punto de limite satisface:

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_*)$$

y entonces esta nuestro punto fijo que buscamos.
Para ver la secuencia (*) es Cauchy y terminar la demonstración tenemos (inducción):

$$|x_j - x_{j+1}| = |f^j(x_0) - f^{j+1}(x_0)| \leq \lambda^j |x_0 - x_1|$$

entonces:

$$|x_n - x_{n+k}| \leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \ldots + |x_{n+k-1} - x_{n+k}|$$

$$\leq \lambda^n (1 + \lambda + \ldots + \lambda^{k-1}) \cdot |x_0 - x_1|$$

$$= \lambda^n \cdot \frac{(1-\lambda^k)}{(1-\lambda)} \cdot |x_0 - x_1| \leq \lambda^n \cdot \frac{|x_0 - x_1|}{1-\lambda} = C \cdot \lambda^n$$

donde $C = \frac{|x_0 - x_1|}{1-\lambda}$ es algún constante. Debido a que $\lambda \in (0,1)$, tenemos $\lambda^n \to 0$ por $n \to \infty$, o la secuencia es Cauchy como deseamos. □

Ahora veremos como esta teorema de contracción podemos aplicar al nuestro ecuación integral en ciertas situaciones:

Teorema (Picard-Lindelöf): Dado una sistema de edo:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{x}) \qquad (\vec{x} \in \mathbb{R}^n)$$

tal que $\vec{f}: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continuo, y Lipschitz en $\vec{x}$ en algún vecinidad de $(t_0, \vec{x}_0)$

[$|\vec{f}(t,\vec{x}) - \vec{f}(t,\vec{y})| \leq L|\vec{x} - \vec{y}|$ $\forall t, \vec{x}, \vec{y}$ en tal barrio de $(t_0, \vec{x}_0)$ y algún constante $L > 0$]

Entonces, existe única solución $\vec{x} = \vec{s}(t)$ definida para t en algún intervalo alrededor t_0 y con condición inicial $\vec{s}(t_0) = \vec{x}_0$.

Comentario: Por teorema de valor medio, cada función de clase C^1 (derivadas parciales existen y son continuos), será continuo y Lipschitz alrededor cualquier punto en su dominio.

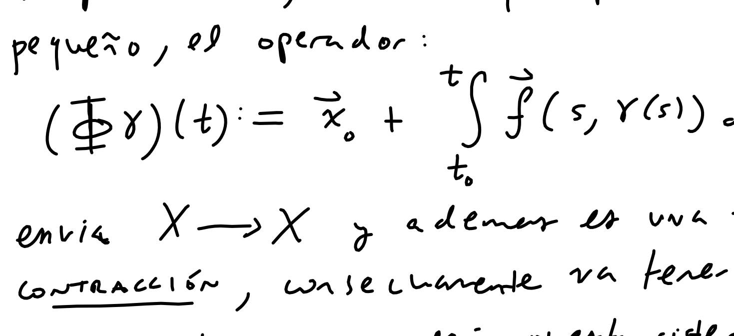
demonstración ("sketch"): Apliquaremos teorema sobre transformaciones de contracción al espacio apropiado.
Considera:

$$X = C^0\big([t_0-\delta, t_0+\delta], B_r(\vec{x}_0)\big)$$

bola de radio r alrededor $\vec{x}_0$.

$$= \{\gamma : [t_0-\delta, t_0+\delta] \longrightarrow B_r(\vec{x}_0)\ ;\ \text{continuo}\}$$

que es el conjunto de funciones continuos con dominio $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ y codominio contenido en $B_r(\vec{x}_0)$:



En sus cursos de analisis vas a ver que X es un espacio metrica completa con la distancia:

$$\|\gamma - \tilde{\gamma}\|_\infty := \sup\{|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| : t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]\}.$$

Aceptando este, veremos que para $\delta > 0$ suficiamente pequeño, el operador:

$$(\Phi\gamma)(t) := \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(s, \gamma(s))\,ds$$

envia $X \to X$ y ademas es una transformación de contracción, consecuenmente va tener punto fijo única, que es otra manera decir nuestro sistema edo tiene solución unica con tal valor inicial como deseamos.

Primer chequeamos la condición que $\Phi: X \to X$ para $\delta > 0$ suficiamente pequeño. Calculamos, para $\gamma \in X$ que:

$$|(\Phi\gamma)(t) - \vec{x}_0| = \left|\int_{t_0}^{t} \vec{f}(s,\gamma(s))\,ds\right|$$

componentes de $\vec{f}$

$$\leq \sum \left|\int_{t_0}^{t} f_j(s,\gamma(s))\,ds\right|$$

$$\leq \sum \int_{t_0}^{t} |f_j(s,\gamma(s))|\,ds$$

$$\leq C \cdot |t-t_0| \leq C\cdot\delta \leq r$$

para $\delta \leq r/C$ suficiamente pequeño.

$\vec{f}$ continuo $\Rightarrow f_j$ continuo $\Rightarrow$ acotadas arriba algún constante $C > 0$

Es decir si eligimos $\delta \leq r/C$ tenemos que para $\gamma \in X$ tambien $\Phi\cdot\gamma \in X$ (su imagen esta contenido en $B_r(\vec{x}_0)$).

Final verifiquaremos que para $\delta > 0$ suficiamente pequeño que $\Phi: X \to X$ es una contracción.

Sea $\gamma, \tilde{\gamma} \in X$, y calculamos:

$$\|\Phi\gamma - \Phi\tilde{\gamma}\|_\infty = \sup_{|t-t_0|<\delta}\left\{\left|\int_{t_0}^{t} \vec{f}(s,\gamma(s)) - \vec{f}(s,\tilde{\gamma}(s))\,ds\right|\right\}$$

$$\leq \sup_{|t-t_0|<\delta}\left\{\int_{t_0}^{t} |\vec{f}(s,\gamma(s)) - \vec{f}(s,\tilde{\gamma}(s))|\,ds\right\}$$

$$\leq \sup_{|t-t_0|<\delta}\left\{\int_{t_0}^{t} L\,|\gamma(s) - \tilde{\gamma}(s)|\,ds\right\}$$

$$\leq \sup_{|t-t_0|<\delta}\left\{L\,\|\gamma - \tilde{\gamma}\|_\infty\,|t-t_0|\right\} \leq L\cdot\delta\,\|\gamma - \tilde{\gamma}\|_\infty$$

que es un contracción si eligimos tambien $\delta < 1/L$. □