

Aquí consideramos sistemas lineal más general

$$d\mathbf{x}/dt = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, y para cada t , tenemos $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$, y, $A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal.

En contraste con los sistemas lineales autonomas (que vimos antes), para sistemas lineales general no tenemos una receta general para sus soluciones explicitas. Aun tienen suficiente estructura (y rol central) que si podemos decir un poco.

Contents

1	ecuaciones variacional: linealizacion alrededor una orbita	2
1.1	flujo y su linealizacion	2
1.2	Wronskiano	4
2	e.d.o. lineal orden n: coeficientes no constantes.	5
2.1	e.d.o. lineal tipo Cauchy-Euler.	6
2.2	reducción de orden	7
2.3	Unas funciones especiales (separación de variables)	8
3	sistemas no-homogenea: variación de constantes	9
3.1	e.d.o. lineal orden n no-homogenea	11
3.2	métodos perturbativos (series)	12
A	otra teorema de comparicion (optativa)	12

¹Connor Jackman, connor.jackman@itam.mx, 10.2026

1 ecuaciones variacional: linealización alrededor una órbita

Recordamos la motivación principal para estudiar sistemas de e.d.o. lineales: el proceso de linealización. Suponer que conocemos algún solución particular $\mathbf{x}_p(t)$ de una sistema general (digamos todo clase C^∞)

$$(*) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}).$$

Esta solución particular abre una ‘ventana’ para entender soluciones de sistema $(*)$ cerca a tal solución particular (que ‘ancho’ esta tal ventana...depende primer en que tanto entendemos un cierto sistema lineal (no-autónoma)!). A saber, ponemos

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \varepsilon \xi(t)$$

que sería una solución de $(*)$ cuando (usa expansión de Taylor)

$$\xi' = A(t)\xi + O(\varepsilon)$$

donde $A(t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}_p(t))$ esta, para cada t , una transformación lineal. Mientras $|\varepsilon| \ll 1$ es pequeño, las soluciones de la sistema lineal (no-autónoma) $\xi' = A(t)\xi$ (las *ecuaciones variacional* alrededor tal solución particular) darán bien aproximaciones del sistema original $(*)$, a lo menos para las órbitas cerca nuestro solución particular (y sobre escalas de tiempo apropiada).

Para un sistema lineal $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ya hemos visto:

- mientras las entradas de $A(t)$ (visto como una matriz $n \times n$) son definidos para todos $t \in \mathbb{R}$, y a lo menos, funciones continuos de t entonces soluciones existen y son únicas y son definidos para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$.
- el espacio de soluciones forman un espacio vectorial de dimensión n . A saber, si $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$ son dos soluciones entonces también su combinación lineal $c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$ es solución. Si tenemos n soluciones con condiciones iniciales $\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_n(0)$ independientes entonces cualquier solución (la solución general) esta algún combinación lineal de tales soluciones (sigue de unicidad de soluciones y que son definidos para todos $t \in \mathbb{R}$).

1.1 flujo y su linealización

Para describir el proceso de linealización arriba en lenguaje mas ‘geometrical’

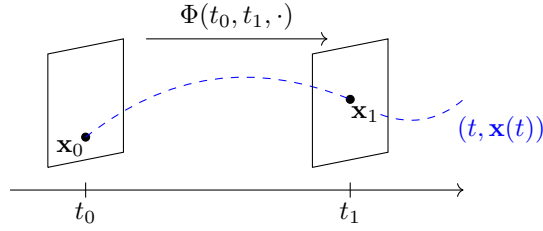
Definition 1. El flujo de un sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ (donde, p.ej. $\mathbf{v}$ es suave) es

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^n$$

que envía $(t_0, t_1, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ al punto $\Phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t_1)$ donde $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ es la solución del sistema con valor inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Remark. En esta definicion usamos un ‘hack’ a veces conveniente: con la flecha rota ‘ $\dashrightarrow$ ’ significamos una aplicacion en que no preocupamos por ahora especificar su dominio (es decir que Φ no tiene que ser definida en todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, pero en algun subconjunto que podemos especificar despues si queremos).

Para simplicidad, en lo que sigue, vamos asumir que las soluciones del sistema bajo consideracion son definidos para todos $t \in \mathbb{R}$ (es decir que su flujo tiene dominio todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$). El flujo captura lo que visualizamos como un ‘transporte’ a lo largo soluciones del sistema:



El flujo de un sistema es generalmente dificil (o imposible) calcular explicitamente (consiste en resolver para las soluciones del sistema). Menos dificil es resolver para su linealizacion alrededor algun punto, lo que es equivalente a resolver el sistema lineal arriba (linealizacion alrededor algun orbita)

Proposition 1. Para $\mathbf{x}_p(t)$ una solucion particular (definida para todos $t \in \mathbb{R}$) de sistema (*) arriba, entonces para cada $t_1 \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\varphi_{t_1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}_o \mapsto \Phi(0, t_1, \mathbf{x}_o)$$

(que envia p.ej. $\varphi_{t_1}(\mathbf{x}_p(0)) = \mathbf{x}_p(t_1)$). Entonces la diferencial de φ_{t_1} en $\mathbf{x}_p(0)$:

$$d_{\mathbf{x}_p(0)}\varphi_{t_1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

envia ξ_o a $\xi(t_1)$ donde $\xi(t)$ es la solucion con condicion inicial $\xi(0) = \xi_o$ de las ecuaciones variacionales ($\xi' = A(t)\xi$) alrededor $\mathbf{x}_p(t)$.

Proof. Ejercicio con definiciones. □

Remark. Si tenemos en mente un enfoque ‘practical’ podemos preguntar ¿que es el punto de hablar sobre flujos si en general no voy a lograr conocerlo? Recordamos que sistemas generales son dificiles, pero aun deseamos sacar informacion (no rendimos). Asi es util decidir que tipo de informacion tendríamos chance de sacar. Si el sistema es complicada, el método de series tambien seria complicado (y ineficiente). Tenemos que ser cuidado a cuales terminos debemos prestar atencion. Desarrollar un lenguaje común para hablar y describir la manera en que estamos pensando sobre tales sistemas nos permite enfocar nuestros esfuerzos a tales propiedades claves para nuestros intereses (y despues, intentar usar algun algoritmo, como p.ej. series, para intentar averiguar que esta pasando). Describir sistemas en terminos de sus flujos es un base en uso comun.

Un caso importante es cuando nuestra solución particular es periódica: $\mathbf{x}_p(t+T) = \mathbf{x}_p(t)$ para todos $t \in \mathbb{R}$ y algún constante $T > 0$ (el periodo). En este caso las ecuaciones variacional determinan la linealización de la mapa de Poincaré (o monodromia, $M = d_{\mathbf{x}_p(0)}\varphi_T \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, alrededor tal órbita periódica). Analizar los valores propios de la monodromia (teoría de Floquet) captura información básica cerca de tal órbita periódica.

La importancia de soluciones particulares, en particular soluciones periódicas recibe énfasis de Poincaré. A saber, motivado por razones diferentes (su teorema de recurrencia: la idea que, en general, todo es casi periódica – tal vez con periodo muy largo), produce la cuotación famosa

“D’ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c’est qu’elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu’ici réputée inabordable.”

– H. Poincaré (§36, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste).

1.2 Wronskiano

Ahora regresamos a un sistema lineal no-autónomo donde, aun que en general ni podemos encontrar las soluciones generales (conocer el ‘flujo’ de tal sistema lineal), tenemos siempre las siguientes propiedades general como base

Proposition 2. *Para un sistema lineal no-autónomo: $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, donde $A(t)$ es continuo para $t \in [t_0, t_1]$, sea*

$$\varphi_{t_0, t_1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}_0 \mapsto \Phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0)$$

el flujo (o transporte) de t_0 a t_1 que envía $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}(t_1)$ donde $\mathbf{x}(t)$ es la solución al sistema con valor inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Entonces:

1. φ_{t_0, t_1} es una transformación lineal,

$$2. \det(\varphi_{t_0, t_1}) = e^{\int_{t_0}^{t_1} \text{tr}(A(t)) dt}.$$

Proof. Para la primera propiedad, considera dos soluciones $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$ con condiciones iniciales $\mathbf{x}_j^o = \mathbf{x}_j(t_0)$. Entonces para $c_j \in \mathbb{R}$ también es $c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$ una solución con condición inicial $c_1\mathbf{x}_1^o + c_2\mathbf{x}_2^o$. De definición: $\varphi_{t_0, t_1}(\mathbf{x}_j^o) = \mathbf{x}_j(t_1)$, y $\varphi_{t_0, t_1}(c_1\mathbf{x}_1^o + c_2\mathbf{x}_2^o) = c_1\mathbf{x}_1(t_1) + c_2\mathbf{x}_2(t_1) = c_1\varphi_{t_0, t_1}(\mathbf{x}_1^o) + c_2\varphi_{t_0, t_1}(\mathbf{x}_2^o)$, es decir φ_{t_0, t_1} es lineal. Para la segunda propiedad, podemos proceder directo en suponer que $\mathbf{x}_j(t)$ son soluciones con condiciones iniciales $\mathbf{x}_j(t_0)$ el base estándar de $\mathbb{R}^n$. Entonces, como una matriz $n \times n$, las columnas de $\varphi_{t_0, t}$ son $\mathbf{x}_j(t) \in \mathbb{R}^n$. Pon $W(t) = \det \varphi_{t_0, t}$. Entonces:

$$\begin{aligned} W' &= \frac{d}{dt} \det(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) = \\ &= \det(\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) + \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2', \dots, \mathbf{x}_n) + \dots + \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n') = \\ &= \det(A\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) + \det(\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) + \dots + \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, A\mathbf{x}_n). \end{aligned}$$

En cada t , la transformacion $A(t)$ en el base $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ tiene entradas $a_{jk}(t)$ por $A(t)\mathbf{x}_j(t) = \sum_k a_{jk}(t)\mathbf{x}_k(t)$. Substituimos en la ultima formula conduce a

$$W' = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})W = \text{tr}(A)W \implies W = W_0 e^{\int \text{tr}(A) dt}$$

que, para nuestras condiciones iniciales esta la formula anunciado. $\square$

Remark. Recordamos que el determinante de una transformacion lineal, L , mide el razon con que volúmenes escalan ($\text{vol}(L(R))/\text{vol}(R) = \det L$).

Remark. Para un sistema de e.d.o. y $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ algun coleccion de soluciones la determinante que parece en la ultima proposicion

$$W(t) = \det(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t))$$

tambien se llama el Wronskiano de la coleccion de soluciones. Las soluciones son independientes cuando su Wronskiano no es cero. Mas comun es considerar el Wronskiano aplicado a una e.d.o. orden n (en que hemos intercambiado las derivadas por variables), donde tiene la forma:

$$W = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (1)$$

para $y_1(x), \dots, y_n(x)$ algun coleccion de soluciones a tal e.d.o. orden n .

2 e.d.o. lineal orden n : coeficientes no constantes.

Ahora consideramos el caso particular de una sistema lineal no-autonoma que corresponde a una e.d.o. lineal (homogenea) orden n con coeficientes que dependen por x :

$$\alpha_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \alpha_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + \alpha_1(x) \frac{dy}{dx} + \alpha_0(x)y = 0$$

donde $\alpha_n(x)$ no esta identicamente cero. Fuera de donde α_n anula (puntos singulares) escribimos nuestra e.d.o. como:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad (2)$$

para $a_k = \alpha_k/\alpha_n$. Corresponde al sistema homogenea y no-autonoma

$$\begin{pmatrix} y \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \dots & -a_{n-2}(x) & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

poniendo $p_k = \frac{d^k y}{dx^k}$.

Remark. Según prop. 2 para (3), obtenemos que $W(x) = W_0 e^{-\int_{x_0}^x a_{n-1}(\xi) d\xi}$ donde el Wronskiano de n -soluciones particular de (2) esta dado en eq. (1).

2.1 e.d.o. lineal tipo Cauchy-Euler.

Para tener unos ejemplos concretos de e.d.o. lineal orden n no-autonomas en que si podemos sacar formulas explicitas consideramos:

Definition 2. Una e.d.o. lineal (homogenea) de orden n es tipo Cauchy-Euler cuando tiene la forma:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \quad (4)$$

para $a_j \in \mathbb{R}$ unos constantes.

Remark. Las e.d.o. tipo Cauchy-Euler en forma (4) tienen $x = 0$ por punto singular.

Las e.d.o. tipo Cauchy-Euler podemos resolver justo que son e.d.o. lineal autonoma en disfraz, a saber un e.d.o. lineal despues cambio variable:

Proposition 3. Una e.d.o. tipo Cauchy-Euler (4) transforma a una e.d.o. lineal orden n con coeficientes constantes despues la substitucion $x = e^t$.

Proof. Usamos induccion. Afirmamos que, para cada $k \in \mathbb{N}$ la substitucion $x = e^t$ convierte $x^k \frac{d^k y}{dx^k} = \frac{d^k y}{dt^k} + c_{k,k-1} \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \dots + c_{k,1} \frac{dy}{dt}$ para algunos constantes $c_{k,j} \in \mathbb{R}$. Cuando $k = 1$ tenemos (regla de cadena con $dx/dt = e^t = x$)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = x \frac{dy}{dx}$$

que completa el caso base. Ahora suponemos valido para k y diferenciamos los dos lados de hipotesis inductiva con respecto a t :

$$\frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} + c_{k,k-1} \frac{d^k y}{dt^k} + \dots + c_{k,1} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(x^k \frac{d^k y}{dx^k} \right) = k x^k \frac{d^k y}{dx^k} + x^{k+1} \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}}$$

es decir: $x^{k+1} \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = \frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} + (c_{k,k-1} - k) \frac{d^k y}{dt^k} + \dots + (c_{k,1} - k c_{k,2}) \frac{d^2 y}{dt^2} - k c_{k,1} \frac{dy}{dt}$. $\square$

Remark. La substitucion $x = e^t$ solo cobre el parte del dominio donde $x > 0$. Similar para cubrir los puntos donde $x < 0$ podemos sustituir $x = -e^t$. El punto singular $x = 0$ coresponde despues tales transformaciones al $t \rightarrow -\infty$.

Para analizar/resolver una e.d.o. tipo Cauchy-Euler no es necesario calcular cada vez la e.d.o. transformada con este cambio de variable. A saber, aplicamos la siguiente razonamiento:

1. Dado una e.d.o. (4) tipo Cauchy-Euler, sabemos gracias a prop. 3 que la substitucion $x = e^t$ va a convertir (4) a alguna e.d.o. lineal con coeficientes constantes.

2. Una e.d.o. lineal orden n con coeficientes constantes resolvemos en conocer su polinomio característica, lo que obtenemos con la sustitución $e^{\lambda t} = y$.
3. Podemos sustituir $y = e^{\lambda t} = x^\lambda$ directamente en (4) para sacar este polinomio característica *sin tener que calcular la e.d.o. transformada*.

EJEMPLOS.

- $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$. Sustituimos $y = x^\lambda$ para sacar el polinomio característica: $0 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$, con solución general $y = c_1 x + c_2 x^2$.
- $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = 0$. Sustituimos $y = x^\lambda$ para sacar el polinomio característica: $0 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$, con solución general $y = x^{-1}(c_1 + c_2 \log x)$.
- $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$. Sustituimos $y = x^\lambda$ para sacar el polinomio característica: $0 = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2 + 1$, con solución general $y = x^{-1}(c_1 \cos(\log x) + c_2 \sin(\log x))$.

Remark. *Similar comentarios que hicimos sobre e.d.o. 1'er orden general aplican a mas generales sistemas lineales (con coeficientes no constantes). A saber, típicamente los unicos que logramos resolver explicitamente (con funciones elementarios) estan justo los para que logramos encontrar un cambio de variables apropiados que convierte tal e.d.o. a una lineal con coeficientes constantes.*

2.2 reducción de orden

Aparte de su linealidad, las e.d.o. lineal orden n tienen en general la siguiente estructura que permite dividir ‘resolverlos’ en unas etapas

Proposition 4. *Si $y_p(x) \neq 0$ es una solución particular (no idénticamente cero) de una e.d.o. lineal orden n (eq. (2)), entonces $y(x) = u(x)y_p(x)$ es otra solución exactamente cuando $v(x) = u'(x)$ es solución de una particular e.d.o. lineal orden $n - 1$.*

Remark. *Entonces, con sola una solución particular, $y_p(x)$, de una e.d.o. lineal orden n , a obtener su solución general $y(x) = u(x)y_p(x)$ divide en dos partes (1) encontrar solución, $v(x)$, a una e.d.o. lineal de orden $n - 1$, y, (2) calcular una anti-derivada (quadratura: $u = \int v(x)dx$). La letra chica: no hay método general para sacar (hasta quadraturas) soluciones particular no triviales.*

Proof. De inducción, para $y = uy_p$, tenemos $y^{(m)} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} u^{(k)} y_p^{(m-k)}$ que, en sustituir en (2) conduce a

$$y_p u^{(n)} + \beta_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + \beta_1 u' + (y_p^{(n)} + a_{n-1} y_p^{(n-1)} + \dots + a_1 y_p' + a_0 y_p) u = 0$$

para algunos funciones $\beta_j(x)$ (depende de $a_k(x)$ y varias derivadas de $y_p(x)$). En particular, que y_p es solución particular, el coeficiente de u es cero, es decir que $v = u'$ satisface una e.d.o. lineal orden $n - 1$. $\square$

Remark. Aplicando prop. 4 repetitivamente, llegamos al siguiente resultado estructural sobre e.d.o. lineal de orden n : dado m soluciones particular y independientes, la solución general divide entre (1) encontrar solución general de una particular e.d.o. lineal orden $n - m$, y (2) calcular m anti-derivadas sucesivamente.

2.3 Unas funciones especiales (separación de variables)

Hemos mencionado arriba la motivación más fundamental para encontrar e.d.o. lineal no-autónoma (linealización alrededor una solución particular). Aquí mencionamos una otra escenario donde también salen e.d.o. lineal no-autónoma: el método de separación de variables en ecuaciones diferenciales *parciales*.

Un operador fundamental es el Laplaciano. En coordenadas Cartesianas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ actuamos sobre funciones $f(x, y, z)$ por:

$$f \mapsto \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Aun en e.d.p. el método de cambios de variables es valorable (para encontrar diferentes tipos de soluciones: los que parecen sencillo en un sistema de coordenadas, pero complicado en una otra). Por ejemplo:

- En coordenadas cilíndricas $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z$. Para $f(r, \theta, z)$ tenemos:

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

- El método de separación de variables es un tipo de Ansatz (es decir adivinar sobre una forma particular de solución). Aquí vamos considerar la e.d.p. para funciones *armonicas*: $\Delta f = 0$. Buscamos una función armónica en la forma particular

$$f(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$$

como un producto de funciones de 1-variable (en coordenadas cilíndricas).

- Sustituimos el Ansatz anterior en el Laplaciano en coordenadas cilíndricas obtenemos funciones armónicas cuando:

$$0 = \frac{\Theta Z}{r} (rR')' + \frac{RZ}{r^2} \Theta'' + R\Theta Z''$$

o, en dividir por $R\Theta Z = f$, tenemos:

$$-\frac{Z''}{Z} = \frac{(rR')'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta}$$

Observa que el lado izquierdo depende solamente de z , mientras el lado derecho solamente de r, θ concluimos que los dos lados son necesariamente

igual a algun constante: $Z'' = -kZ$, y $kr^2 - \frac{r(rR')'}{R} = \frac{\Theta''}{\Theta}$ donde observamos de nuevo que el lado izquierda de la segunda ecuacion depende solamente de r y el lado derecha solamente de θ para que los dos lados son constantes y tenemos funciones armonicas como productos despues resolver las e.d.o. para sus compenentes:

$$Z'' = -kZ, \quad \Theta'' = -\ell\Theta, \quad kr^2 + \ell = \frac{r(rR')'}{R}$$

donde k, ℓ son unos constantes. Los primer dos son facil resolver (coeficientes constantes), mientras el tercer (para $R(r)$) es algo mas interesante (ecuacion general de Bessel).

- Notar que las soluciones fisical deben tener $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ periodico de periodo 2π . Es decir debemos tener $\ell = n^2$ algun $n \in \mathbb{N}$. La e.d.o. para $R(r)$ se expande como:

$$(kr^2 + n^2)R = rR' + r^2R''.$$

Las soluciones con $k = -c^2 < 0$ son tipicamente los buscados (asi podemos garantizar p.ej. $Z \rightarrow 0$ mientras $z \rightarrow \infty$). En re-escalar con $x = cr, y = R$ tenemos la forma normal del famoso *ecuacion de Bessel*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Un importante tipo de e.d.o. lineal no-autonoma (su importancia surge de que sus soluciones generan especiales tipos de funciones armonicas!).

Remark. *En la misma manera (diferentes e.d.p. y seperacion con diferentes coordenadas) salen varias otras tipos de ‘funciones especiales’ como soluciones de especificas e.d.o. lineal no-autonomas. Por ejemplo separando el Laplaciano en coordenadas esfericales llegamos al e.d.o. de Legendre.*

3 sistemas no-homogenea: variación de constantes

Ahora consideramos un método general para encontrar solucion particular a sistemas no-homogeneas en el caso que ya tenemos la solucion general a su part homogenea. Este método ‘perturbativo’ aplica a situaciones mas general que las lineales:

Proposition 5. *(variación de constantes) Para un sistema de e.d.o. en la forma:*

$$(*) \quad d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}_o(t, \mathbf{x}) + \mathbf{v}_p(t, \mathbf{x}), \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n).$$

Si conocemos la solución general del sistema original $d\mathbf{x}^o/dt = \mathbf{v}_o(t, \mathbf{x}^o)$, digamos en la forma que

$$\mathbf{x}^o(t) = \Phi^o(t, \mathbf{x}_0)$$

es la solución del sistema original con valor inicial $\mathbf{x}^o(0) = \mathbf{x}_0$, entonces soluciones al sistema perturbado (*) están dado por:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi^o(t, \xi(t))$$

donde $\xi(t)$ es cualquier solución al sistema (las ecuaciones para las variaciones de las constantes)

$$(*)' \quad \xi' = \nu(t, \xi), \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

donde $\nu(t, \xi) = \left(\frac{\partial \Phi^o}{\partial \mathbf{x}_0}(t, \xi) \right)^{-1} \mathbf{v}_p(t, \Phi^o(t, \xi))$.

Remark. En general, el sistema $(*)'$ para las variaciones de las constantes es igual difícil resolver que la sistema perturbada (*). Aun la sistema $(*)'$ puede ser de mas interés, ya que sus soluciones describen directamente la manera en que el término perturbativo $\mathbf{v}_p(t, \mathbf{x})$ en (*) va a deformar las soluciones conocidos de la edo original. Sus orígenes (Lagrange) vienen del objetivo de describir el movimiento de una planeta: cuando $\mathbf{v}_o(t, \mathbf{x})$ representa el efecto del sol en la planeta (un sistema que podemos resolver) y $\mathbf{v}_p(t, \mathbf{x})$ los efectos de cualesquieras otros objetos sobre la planeta (p.ej. otras planetas).

Proof. Usamos regla de cadena sobre $\mathbf{x}(t) = \Phi^o(t, \xi(t))$ para tener: $\mathbf{x}'(t) = \frac{\partial \Phi^o}{\partial t}(t, \xi(t)) + \frac{\partial \Phi^o}{\partial \mathbf{x}_0}(t, \xi(t)) \cdot \xi'(t) = \mathbf{v}_o(t, \mathbf{x}(t)) + \frac{\partial \Phi^o}{\partial \mathbf{x}_0}(t, \xi(t)) \cdot \xi'(t)$ (recordando que $\Phi^o(t, \mathbf{x}_0)$ son soluciones del sistema original). Entonces tenemos soluciones a (*) exactamente cuando $\frac{\partial \Phi^o}{\partial \mathbf{x}_0}(t, \xi(t)) \cdot \xi'(t) = \mathbf{v}_p(t, \mathbf{x}(t))$, que es $(*)'$. $\square$

Ahora para nuestros sistemas bajo consideración:

Proposition 6. Considera un sistema lineal general:

$$d\mathbf{x}/dt = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \quad (5)$$

no homogénea ($\mathbf{b} \neq 0$). Si conocemos la solución general a su parte homogénea, $d\mathbf{x}/dt = A(t)\mathbf{x}$, entonces también tenemos las soluciones particular al sistema no homogénea hasta cuadraturas. Mas explícitamente, si $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ son n -soluciones independientes del parte homogénea entonces

$$u_1(t)\mathbf{x}_1(t) + \dots + u_n(t)\mathbf{x}_n(t)$$

sería solución de (5) cuando

$$u_j = \int b_j(t) dt$$

para $\mathbf{b}(t) = b_1(t)\mathbf{x}_1(t) + \dots + b_n(t)\mathbf{x}_n(t)$.

Remark. En particular si el parte homogénea es autónoma, $d\mathbf{x}/dt = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, entonces después conocer los espacios/valores propios de A también tenemos las soluciones al no-homogénea hasta cuadraturas.

Proof. Ponemos $\mathbf{x}(t) = u_1(t)\mathbf{x}_1(t) + \dots + u_n(t)\mathbf{x}_n(t)$ que seria solucion de (5) cuando (regla producto)

$$u'_1\mathbf{x}_1 + \dots + u'_n\mathbf{x}_n + u_1\mathbf{x}'_1 + \dots + u_n\mathbf{x}'_n = A(u_1\mathbf{x}_1 + \dots + u_n\mathbf{x}_n) + \mathbf{b}$$

ya que $\mathbf{x}'_j = A\mathbf{x}_j$ entonces tenemos la condicion $u'_1\mathbf{x}_1 + \dots + u'_n\mathbf{x}_n = \mathbf{b}$, que son los anunciados despues escribir $\mathbf{b}$ en este base de $\mathbf{x}_j$. $\square$

3.1 e.d.o. lineal orden n no-homogenea

Como otro caso particular del método de variacion de constantes:

Proposition 7. *Considera una e.d.o. lineal orden n general:*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) \quad (6)$$

no homogenea ($b \not\equiv 0$). Si conocemos la solucion general a su parte homogenea, entonces tambien tenemos las soluciones particular al sistema no homogenea hasta quadraturas. Mas explicitamente, si $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son n -soluciones independientes del parte homogenea entonces

$$u_1(x)y_1(x) + \dots + u_n(x)y_n(x)$$

sería solucion de (6) cuando

$$u_j = \int b_j(x) dx$$

donde b_j sacamos del sistema lineal:

$$\begin{cases} b_1 y_1 + \dots + b_n y_n = 0, \\ b_1 y'_1 + \dots + b_n y'_n = 0, \\ \dots \\ b_1 y_1^{(n-2)} + \dots + b_n y_n^{(n-2)} = 0 \\ b_1 y_1^{(n-1)} + \dots + b_n y_n^{(n-1)} = b. \end{cases}$$

Explicitamente (regla Cramer)

$$b_j = (-1)^{j+n} b \frac{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_{j-1} & y_{j+1} & \dots & y_n \\ y'_1 & \dots & y'_{j-1} & y'_{j+1} & \dots & y'_n \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_{j-1}^{(n-2)} & y_{j+1}^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y'_1 & \dots & y'_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}.$$

Proof. Aplicamos prop. 6 al sistema lineal no-homogenea que corresponde a eq. (6), donde en forma vectorial nuestros soluciones particular $y_j(x)$ y parte no homogenea representa con:

$$\begin{pmatrix} y_j(x) \\ y_j'(x) \\ \vdots \\ y_j^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

□

3.2 métodos perturbativos (series)

Como una motivación para ver donde sistemas no-homogeneas pueden salir consideramos una situación representativa del método perturbaciones. A saber consideramos una e.d.o. (homogenea) de la forma:

$$y'' + (1 - \varepsilon p(x))y = 0 \quad (7)$$

donde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ es un parametro (pequeño) y $p(x)$ alguna función (p.ej. analitica). Cuando $\varepsilon = 0$ podemos resolver (7) explicitamente. Como procede el método de series para sacar informacion sobre soluciones de (7) cuando $\varepsilon > 0$?

Ponemos

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots$$

que seria solución de (7) cuando tenemos

$$y_0'' + y_0 = 0, \quad y_1'' + y_1 = p y_0, \quad y_2'' + y_2 = p y_1, \quad \dots$$

o la recurrencia general $y_{k+1}'' + y_{k+1} = p y_k$. Es decir, para encontrar tal expansion involucra despues resolver el caso no perturbado ($\varepsilon = 0$) para $y_0(x) = A \cos(x + a)$, encontramos sucesivamente cada termino de mas alta orden en resolver un especifica e.d.o. lineal no-homogenea (con parte homogenea autonoma, entonces, a lo menos algo resolvable hasta quadraturas con prop. 6).

Consideramos esta situacion en mas detalle en una nota extra sobre ecuaciones de G.W. Hill (y el caso particular de la ecuacion de E.L. Mathieu).

A otra teorema de comparicion (optativa)

Teoremas de comparicion son una herramienta valorable para superar el hecho que tipicamente obtener formulas explicitas no es razonable. Antes hemos visto una teorema de comparicion para e.d.o. primer orden, aqui presentamos unas teoremas de comparicion para e.d.o. 2' da orden.

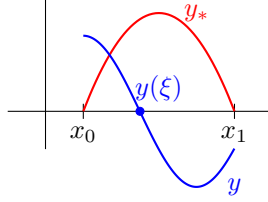
Theorem 1 (Sturm separation). *Considera una e.d.o. 2' da orden en la forma Sturm-Liouville*

$$(S - L) \quad (a(x)y')' + b(x)y = 0$$

donde $a(x) \neq 0$ sobre algún intervalo $[x_0, x_1]$. Si $y_*(x)$ es una solución particular de (S-L) con

$$y_*(x_0) = 0 = y_*(x_1), \quad e \quad y_*(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_1)$$

Entonces cualquier solución $y(x)$ de (S-L) con $y(x_0) \neq 0$ tiene $y(\xi) = 0$ algún $\xi \in (x_0, x_1)$.

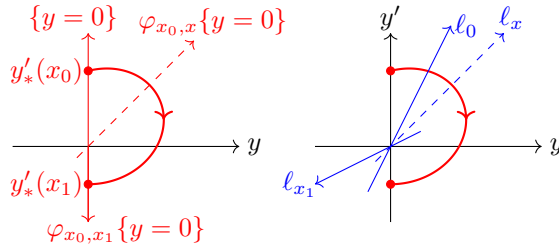


Proof. Multiplicando con -1 si necesario consideramos cuando $y_*(x) > 0$ sobre $x \in (x_0, x_1)$ (sin perder generalidad). Que $y_*(x_0) = 0 = y_*(x_1)$ tenemos $y'_*(x_0) \geq 0$, $y'_*(x_1) \leq 0$. De hecho las últimas desigualdades son estrictas:

$$y_*(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0, x_1), \quad y'_*(x_0) > 0, \quad y'_*(x_1) < 0$$

(si estaban igualdades, por unicidad de soluciones a (S-L) tendríamos $y_*(x) \equiv 0$). Entonces, en el plano (y, y') , la curva $(y_*(x), y'_*(x))$, $x \in (x_0, x_1)$ traza una curva en el semi-plano $y > 0$ que conecta $(0, y'_*(x_0))$ con $(0, y'_*(x_1))$.

Tenemos las aplicaciones lineales invertibles (flujo) $\varphi_{x_0, x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} y_o \\ y'_o \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$ para $y(x)$ una solución a (S-L) con $y(0) = y_o$, $y'(0) = y'_o$. Entonces el imagen $\varphi_{x_0, x}\{y = 0\}$ del eje y' hace media vuelta por π mientras x crece de x_0 a x_1 :



Por continuidad, concluimos que dado cualquier otra línea, ℓ_0 (pasando por el origen) entonces las líneas $\ell_x = \varphi_{x_0, x}(\ell_0)$ tienen que coincidir con el eje y' para algún instante $\xi \in (x_0, x_1)$ (es decir soluciones con condiciones iniciales sobre ℓ_0 tienen un cero cuando $x = \xi$). $\square$

Similar a la teorema separacion tenemos:

Theorem 2 (Sturm comparison). *Considera dos e.d.o. 2' da orden en la forma*

$$(a(x)y')' + b(x)y = 0, \quad (a(x)Y')' + B(x)Y = 0$$

donde $a(x) \neq 0$, y , $B(x) > b(x)$ sobre algún intervalo $[x_0, x_1]$. Si $y_*(x)$ es una solución particular de la primera e.d.o. con

$$y_*(x_0) = 0 = y_*(x_1), \quad e \quad y_*(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_1)$$

Entonces cualquier solución $Y(x)$ de la segunda e.d.o. tiene $Y(\xi) = 0$ algún $\xi \in (x_0, x_1)$.

Proof. El caso $a(x) \equiv 1$ hiciste en la tarea, para ejercicio: extender la demostración de la tarea al caso actual ($a(x) \neq 0$). Para otra ejercicio: demostrar la teorema comparicion en extender la demostracion mas geometrical que hicimas arriba para la teorema seperacion (sugerencia: puede ser útil comparar soluciones de las e.d.o. 1'er orden que controlan las pendientes $q(x) = y(x)/y'(x)$, $Q(x) = Y(x)/Y'(x)$ o $p(x) = y'(x)/y(x)$, $P(x) = Y'(x)/Y(x)$). $\square$

Remark. *La version anunciado del teorema comparicion de Sturm aun puede salir con asunciones menos fuerte. Por ejemplo es suficiente que $B(x) \geq b(x)$ sobre $[x_0, x_1]$ con $B(x_*) > b(x_*)$ algún $x_* \in [x_0, x_1]$. Tambien hay variaciones con coeficiente mas general $A(x)$ de Y'' en la 2' da ecuacion.*