§8: LINEALIZACIÓN

Ahora comenzamos enfocar mas en sistemas de e.d.o. y edo de orden mas alto. Principalmente pensamos sobre orden 2, igual que la mayoridad de los resultados siguen para cualquier orden superior. Hemos dado antes la definición general de una sistema, o, de un edo de mas alta orden, para familiazar tenemos los ejemplos concretos:

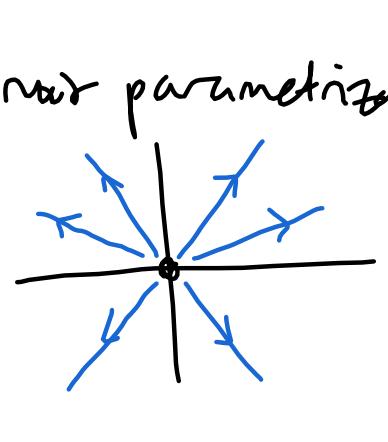
Ejemplos: (1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}$ es un ejemplo de una sistema DESCOPLADA en el sentido que tenemos simplemente dos edo's 1'er orden que no son relacionados uno al otro.

Para su solución resolvemos cada edo 1'er orden como ya aprendimos como hacer:

$$x(t) = x_0 e^t, \quad y(t) = y_0 e^t$$

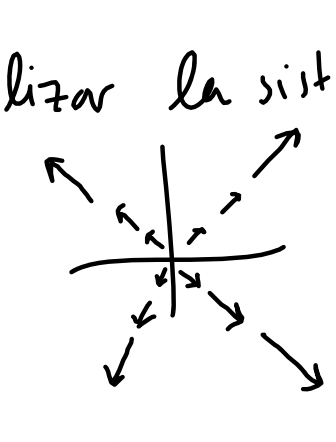
esta nuestra solución general con la condición inicial $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

Geometricamente estas curvas parametrizadas estan trazando los rayos por el origen:



[mientras $t \to -\infty$, las soluciones limiten hacía el origen]

Podemos visualizar la sistema como un CAMPO VECTORIAL sobre el plano:



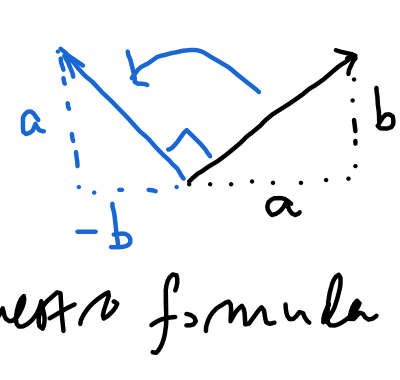
(en cada punto el vector esta dirigido radialmente, con magnitud mas grande mas lejos del origen).

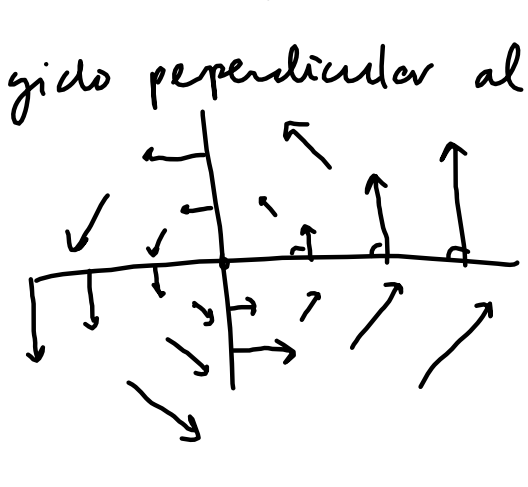
Entonces encontrar soluciónes de tal sistema parametriza soluciones al edo 1'er orden de correspondiente campo de lineas generados/dirigidos por tal campo vectorial $\left[dy/dx = y/x \right]$.

---

(2) Similarmente al previo: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$ es una sistema que ya resolvimos con método de series.

También, vemos geometricalmente sus soluciones trazan CÍRCULOS en notar que el campo vectorial es dirigido perpendicular al dirección radial:





que coincide con nuestro formula de método series $\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{cases}$, ó en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}}_{\text{rotación por angulo 't' alrededor origen en el sentido anti-horario.}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

y notamos que tal sistema (campo vectorial) dirije el campo de lineas 1'er edo $dy/dx = -x/y$

---

3) Similarmente: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$

para esta sistema tenemos varias opciones para llegar al soluciones.

*) podriamos usar método de series (similar al $x'=-y, y'=x$) para llegar a: $\begin{cases} x(t) = x_0 \cosh t + y_0 \sinh t \\ y(t) = x_0 \sinh t + y_0 \cosh t \end{cases}$

*) podriamos "eliminar" $x = \frac{dy}{dt}$, para escribir la sistema como un e.d.o. 2'da orden equivalente:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = y \rightsquigarrow y'' = y.$$

y este tipo de edo 2'da orden sabemos como reducir a un edo 1'er orden [pon $u = y'$, y considera $\frac{du}{dy}$]:

$$(y')^2 = y^2 + c$$

que se puede integrar con separación, y funciones trigonometricas hiperbolicas (cosh, sinh).

*) si solo nos interesa la traza (y no las parametrizaciónes) de las soluciones al sistema podemos considerar el campo lineal que diregen, que en este caso es un edo 1'er orden seperable: $\left[dy/dx = x/y \longrightarrow y^2 - x^2 = cst. \text{ (hiperbolas)} \right]$

*) La técnica mas sencillo/generalizable en esta situación sería la tecnica de cambio de variable. Ponemos:

$$X = x+y, \quad Y = x-y$$

para que la sistema transforma a:

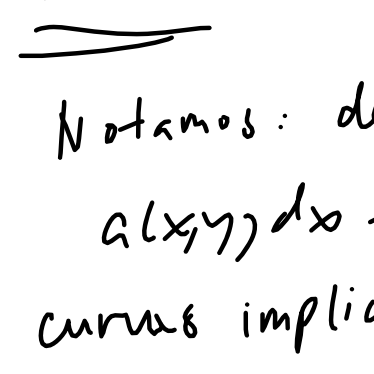
$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = X \\ \frac{dY}{dt} = -Y \end{cases}$ que es descoplado (entonces facil resolver) con solución $X = X_0 e^t$, $Y = Y_0 e^{-t}$, que podemos usar algebra para regresar al variables original x, y, y ver las soluciones anterior. La tecnica principal para sistemas de la forma de estas ultimas ejemplos (ciertos sistemas lineal) sería encontrar cambios de variables (cambio de base) en que la sistema lineal se "descopla" tanto que posible para que sea facil resolver en el base/coordenada apropiado.

Antes sumergir completamente en sistemas lineales motivamos con unas consideraciones su importancía/ROL CENTRAL.

Considera un campo lineal en la forma general:

(1) $a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy = 0$

tal formula define una linea $\left[\text{linea normal al } (a(x,y), b(x,y)) \text{ por } (x,y) \right]$ al menos cuando $a(x,y)$, y, $b(x,y)$ no son simultaneamente zero.



Cuando $\boxed{a(x_0,y_0) = 0, \text{ y }, b(x_0,y_0) = 0}$, la ecuación (1) no define ningún linea, y llamamos tal (x_0, y_0) un PUNTO SINGULAR del campo de lineas (1).

La siguiente pregunta básica aún no tiene respuesta completa:

¿Dado un campo de lineas: $a(x,y)dx + b(x,y)dy = 0$ con a, b suaves (C^∞), y (x_0, y_0) como punto singular aislado, como parecen las curvas integrales de tal campo de lineas cerca del (x_0, y_0)?

Debido a su centralidad, aun que no hay respuesta completa, si hay varias resultados parciales que responden al esta última pregunta. Los más sencillos concernan la linealización del sistema/edo alrededor tal punto singular.

Notamos: dado un campo de lineas (posiblamente singular) $a(x,y)dx + b(x,y)dy = 0$ podemos buscar soluciones por curvas implicitas (método factor integrante: $\varphi_x = \mu a$, $\varphi_y = \mu b$), ó, buscar soluciones por curvas parametizados:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda b, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda \cdot a$$

(algún función $\lambda(x,y) \neq 0$), que es otra manera escribir una sistema (una sistema dirigido a lo largo el campo de lineas dado). Entonces, es conveniente reformular un edo general (posiblemente singular) $a\,dx + b\,dy = 0$ como la sistema (curvas parametizados): $[x' = -b, y' = a]$.

Linealización

Dado un sistema con punto singular, traslamos tal punto singular al origen y consideramos metodo expansión:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x,y) = u(0,0) + x \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) + R_1(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = v(x,y) = v(0,0) + x \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) + y \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) + R_2(x,y) \end{cases}$$

que debido a que el origen es singular tiene $u(0,0) = 0$, $v(0,0) = 0$ y podemos escribir en la forma:

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y + R_1(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = \gamma x + \delta y + R_2(x,y) \end{cases}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes y (cuando u, v son C^1) los restos son controlados por:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} R_k(x,y) \Big/ \sqrt{x^2+y^2} = 0,$$

y esperamos que en ignorar tales restos la sistema no comparte "demasiado" diferente que la sistema mas simple:

$$(L) \quad \left[\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma x + \delta y \right.$$

que es la linealización de $(*)$ alrededor su punto singular.

Para quantificar la diferencía entre $(*)$ y su linealización (L) tenemos la siguiente (valido para cualesquiera numeros de variables):

Teorema (Aproximación lineal): Para una sistema C^1 de la forma:

$$(1) \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = A \cdot \vec{x} + R(\vec{x})$$

donde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, y $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una tranformación lineal (matriz $n \times n$), y los restos satisfacen: $\lim_{\vec{x}\to 0} \frac{R(\vec{x})}{|\vec{x}|} = 0$. Entonces, dado cualquier $\varepsilon > 0$, $T > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que:

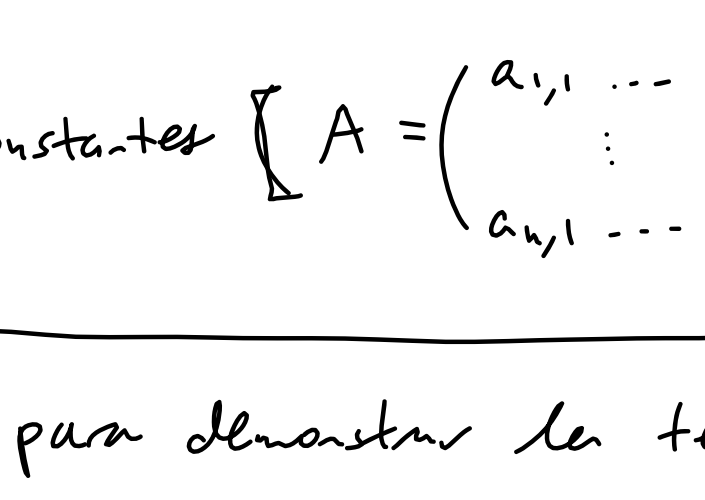
$$|\vec{x}(t) - \vec{x}_L(t)| < \varepsilon, \quad \forall |t| \leq T$$

donde $\vec{x}(t)$ es solución de (1), y $\vec{x}_L(t)$ solución ala linealización, $\frac{d\vec{x}_L}{dt} = A \cdot \vec{x}_L$, con condiciones inicial:

$$\vec{x}_L(0) = \vec{x}(0), \quad |\vec{x}(0)| < \delta.$$

Entonces la solución al linealización aproxima la solución verdadero cerca (ε pequeño) por largos tiempos (T grande), mientras comenzan suficianmente cerca al punto singular:

$|x(0)| < \delta$



Por consequencía, es importante entender bien soluciones a los mas simples sistemas lineal que obtenemos por el proceso de linealización: $\frac{d\vec{x}}{dt} = A \cdot \vec{x}$ en forma "matricial", ó, componentes:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,n} x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{2,1} x_1 + \dots + a_{2,n} x_n \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n,1} x_1 + \dots + a_{n,n} x_n \end{cases}$$

donde $a_{j,k} \in \mathbb{R}$ son constantes $\left[A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \right]$.

Comentaremos que para demostrar la teorema arriba sobre la linealización, una manera esta en usar la siguiente Lemma útil para establecer tales teoremas de comparición:

Lemma de GRONWALL: Sea $u, v, c: [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que:

1) u, v son continuos
2) c es diferenciable y no-negativa: $c \geq 0$
3) Satisfacen la desigualidad

$$v(t) \leq c(t) + \int_0^t u(s) v(s)\,ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

Entonces tambien satisfacen la desigualidad:

$$v(t) \leq c(0)\, e^{\int_0^t u(s)\,ds} + \int_0^t c'(s)\, e^{\int_s^t u(\tau)\,d\tau}\,ds$$

Con esta lemma, podemos establecer la siguiente teorema de comparición:

Teorema: Dado un sistema

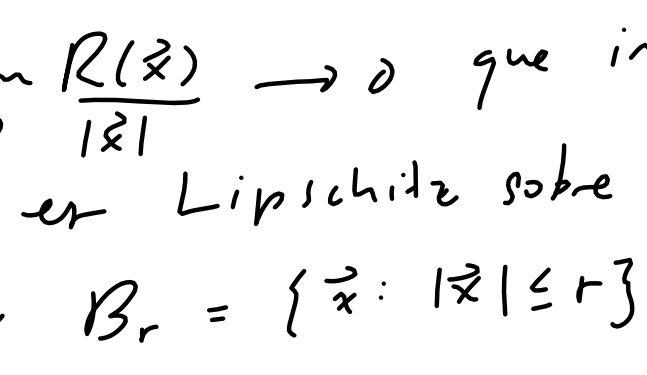
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

con $\vec{f}$ localmente Lipschitz en $\vec{x}$, y soluciones $\vec{x}(t)$, $\vec{y}(t)$ a tal sistema definida sobre algún intervalo $t \in [t_0, t_1]$, entonces existe algún constante $C > 0$ tal que:

$$|\vec{x}(t) - \vec{y}(t)| \leq |\vec{x}(t_0) - \vec{y}(t_0)|\, e^{C(t - t_0)}$$

para todos $t \in [t_0, t_1]$.

Es decír tenemos estimaciones por el rapidez que soluciones estan seperando:



Demonstración: Suponemos que los dos soluciones $\vec{x}(t)$, $\vec{y}(t)$ tienen trazas sobre $t_0 \leq t \leq t_1$ contenido en algún conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ (que puede ser compacto, ya que $\vec{x}(t), \vec{y}(t)$ son continuos) tal que debido a que $\vec{f}$ es localmente Lipshitz, tenemos algún constante $L = L_U > 0$ tal que

$$|\vec{f}(t,\vec{x}) - \vec{f}(t,\vec{y})| \leq L\, |\vec{x} - \vec{y}|, \quad \forall t \in [t_0, t_1], \vec{x}, \vec{y} \in U.$$

y ahora para: $\vec{z}(t) = \vec{x}(t) - \vec{y}(t)$, tenemos:

$$\vec{z}(t) - \vec{z}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{z}'(s)\,ds = \int_{t_0}^t \vec{f}(s, \vec{x}(s)) - \vec{f}(s, \vec{y}(s))\,ds$$

entonces:

$$\begin{aligned} |\vec{z}(t)| &= \left| \vec{z}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{f}(s,\vec{x}(s)) - \vec{f}(s,\vec{y}(s))\,ds \right| \\ &\leq |\vec{z}(t_0)| + \left| \int_{t_0}^t \vec{f}(s,\vec{x}(s)) - \vec{f}(s,\vec{y}(s))\,ds \right| \\ &\leq |\vec{z}(t_0)| + \int_{t_0}^t |\vec{f}(s,\vec{x}(s)) - \vec{f}(s,\vec{y}(s))|\,ds \\ &\leq |\vec{z}(t_0)| + \int_{t_0}^t L\, |\vec{x}(s) - \vec{y}(s)|\,ds = |\vec{z}(t_0)| + \int_{t_0}^t L\, |\vec{z}(s)|\,ds. \end{aligned}$$

Aplicando Lemma de Gronwall para $v(t) = |\vec{z}(t)|$, $u(t) \equiv L$, y $c(t) \equiv |\vec{z}(t_0)|$, tenemos:

$$|\vec{z}(t)| \leq |\vec{z}(t_0)|\, e^{L(t - t_0)}$$, que es la inegalidad dicho $\square$.

Ahora consideramos similar argumentos para establecer la teorema sobre linealización.

Demonstración (aproximación Lineal): Sea $\varepsilon > 0$, $T > 0$ dados y $\vec{x}(t)$, $\vec{x}_L(t)$ soluciónes á $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + R(\vec{x})$, $\frac{d\vec{x}_L}{dt} = A\vec{x}_L$ con condición iniciales $\vec{x}(0) = \vec{x}_L(0) = \vec{x}_0$, a ser determinado "suficianente pequeño" ($|\vec{x}_0| < \delta \leftarrow$ a ser determinado).

Por asumción: $\lim_{\vec{x}\to 0} \frac{R(\vec{x})}{|\vec{x}|} \to 0$ que implique $\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x} + R(\vec{x})$ es Lipschitz sobre p.ej. algún bola alrededor el origen $B_r = \{\vec{x} : |\vec{x}| \leq r\}$.

Entonces, debido al última teorema de comparición, tenemos $|\vec{x}(t)| \leq |\vec{x}_0| e^{Lt}$ para todos $0 \leq t$ tal que $|\vec{x}_0| e^{Lt} \leq r$ (donde L es el constante de Lipshitz de $\vec{f}$ sobre B_r).

En particular, cuando $|\vec{x}_0| \leq r e^{-TL} =: \delta_1$, la solucion $\vec{x}(t)$ esta definida para todos $t \in [0,T]$ y satisface:

$$|\vec{x}(t)| \leq |\vec{x}_0| e^{Lt} \leq |\vec{x}_0| e^{LT} \leq r \quad \forall t \in [0,T].$$

Ahora ponemos $z(t) = x(t) - x_L(t)$ (con $|\vec{x}_0| \leq \delta_1$) y tenemos:

$$\begin{aligned} |z(t)| &= \left| \int_0^t A z(s) + R(x(s))\,ds \right| \\ &\leq \int_0^t |Az(s)| + |R(x(s))|\,ds \\ &\leq \int_0^t a|z(s)| + |R(x(s))|\,ds, \quad \forall t \in [0,T] \end{aligned}$$

donde $a = \max_{|v|=1} |Av| \geq 0$. Para controlar el termino $\int_0^t |R(x(s))|\,ds$, consideramos que (por hipotesis) $\frac{R(\vec{x})}{|\vec{x}|} \to 0$, $\vec{x} \to 0$.

entonces dado cualquier $\varepsilon' > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que

$$|R(\vec{x})| \leq \varepsilon' |\vec{x}| \quad \text{cuando} \quad |\vec{x}| < \delta'.$$

Entonces si $|\vec{x}_0| \leq \min\{\delta_1, \delta' e^{-LT}\}$, tenemos:

$$|\vec{x}(t)| \leq |\vec{x}_0| e^{Lt} \leq |\vec{x}_0| e^{LT} \leq \delta', \quad \forall t \in [0,T]$$

Y tenemos:

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq \int_0^t a|z(s)| + \varepsilon' |x(s)|\,ds \\ &\leq \varepsilon' \cdot r \cdot t + \int_0^t a|z(s)|\,ds, \quad \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

que es en forma para aplicar Lemma de Gronwall: $[v(t) = |z(t)|,\ c(t) = \varepsilon' \cdot r \cdot t,\ u(t) \equiv a]$ para concluir que:

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq \int_0^t \varepsilon' r\, e^{a(t-s)}\,ds = \frac{\varepsilon' r}{a} (e^{at} - 1) \\ &\leq \frac{\varepsilon' r}{a} (e^{aT} - 1), \quad \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

entonces toma $\varepsilon' < \frac{a\varepsilon}{r(e^{aT} - 1)}$ con $\delta = \min\{\delta_1, e^{-LT}\delta'\}$ para tener nuestro teorema. $\square$