
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Sistemas dinámicos I (MAT-24210) Otoño 2026

Primer examen 22/09/2026

Duración: 90m

No está permitido el uso de material electrónico.

Responde de manera clara y concisa, justificando adecuadamente todas tus respuestas.

1. Para $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, considere la e.d.o. (campo de líneas)

$$(y - x^n)dx + xdy = 0.$$

Determine todas las curvas integrales que pasan por el punto singular $x = 0, y = 0$.

2. Verdadero o falso (justifique su respuesta); para $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$:

- (a) Cada solución $y(x)$ de una e.d.o. de la forma $y' = y^n$ está definida sobre todo $\mathbb{R}$.
- (b) Cada solución $y(x)$ de una e.d.o. de la forma $y' = x^n$ está definida sobre todo $\mathbb{R}$.
- (c) Una solución $y(x)$ con $y(0) = 1$ de una e.d.o. de la forma $y' = |x|^{1/n}$ es única.
- (d) Una solución $y(x)$ con $y(0) = 1$ de una e.d.o. de la forma $y' = |y|^{1/n}$ es única.

3. Determine las soluciones en el plano $(x, \frac{dx}{dt})$ de

$$a^2 \frac{d^3 x}{dt^3} + \frac{dx}{dt} = 0$$

para $a \in \mathbb{R}$ un parámetro. ¿Para cuáles valores de a son todas las soluciones periódicas con periodo 2π ?

4. Considere la e.d.o.

$$y'' = (xy' - y)^3 \tag{1}$$

- (a) Verifique que después de la sustitución $u = y/x$, la e.d.o. (1) se transforma en una e.d.o. de la forma:

$$u'' = a(x)u' + b(x)(u')^n. \tag{2}$$

Encuentre una potencia adecuada m tal que la sustitución $u' = p^m$ transforme la e.d.o. (2) en una e.d.o. lineal de primer orden en p .

- (b) Determine la solución particular de (1) que pasa por $x_o = 0, y_o = 1$ con pendiente $y'_o = 0$.

BONUS (3PTS.): Determine la solución general de (1). ¿Cuál es la descripción geométrica de estas curvas?

BONUS (2PTS.): Diferencie (1) para establecer que cualquier solución de (1) también satisface $y''' = 3x(y'')^{5/3}$. Determine la expansión en serie de potencias hasta orden 4 de la solución particular de (1) que pasa por $x_o = 0, y_o = 1$ con pendiente $y'_o = 0$.

Cada pregunta tiene el siguiente valor:

1	2.a	2.b	2.c	2.d	3	4.a	4.b
5	2.5	2.5	2.5	2.5	5	5	5

Exam 1

1

- ① Haz varias maneras que puedes encontrar las soluciones general de esta e.d.o. Podemos escribirlo como:

$$x \frac{dy}{dx} + y = x^n$$

que es lineal y ya en la forma:

$$x^n = \frac{d}{dx}(xy) \Rightarrow xy = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

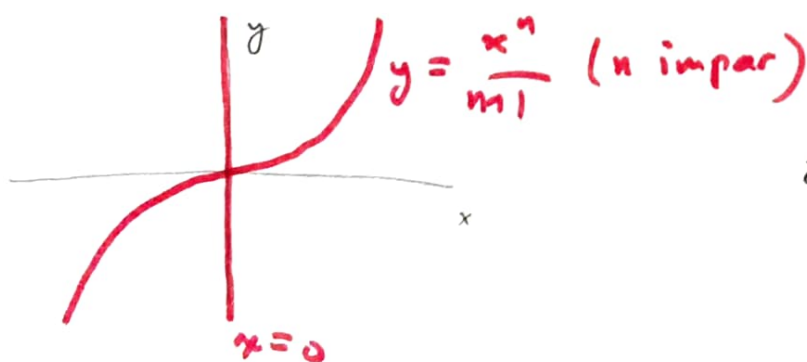
pasan por el origen cuando $C=0$, es decir:

$$xy = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

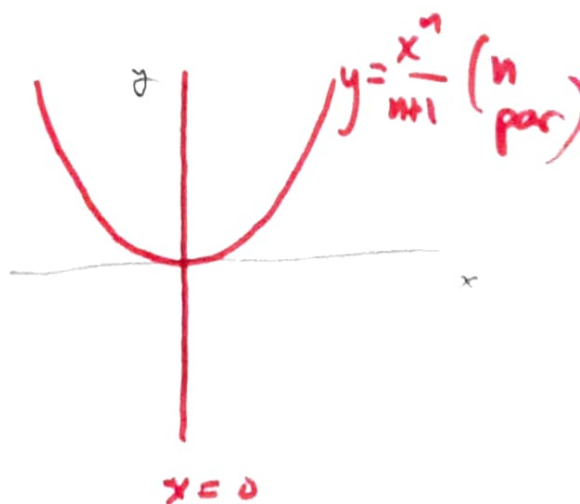
que esta formado de las dos curvas:

$$\boxed{x=0} ; \text{ y } ; \boxed{y = \frac{x^n}{n+1}}$$

que parece como:



ó



2

12

(a) **FALSO** por ejemplo con $n=2$, tenemos soluciones por separación de variables

$$\int \frac{dy}{y^2} = x+c \Rightarrow -\frac{1}{y} = x+c \Rightarrow y = -\frac{1}{x+c}$$

que no está definido para todo $x \in \mathbb{R}$ ($x_0 = -c$).

(b) **VERDAD** la solución general está

$$y = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{que está } (n \in \{1, 2, \dots\}) \text{ definida para todas } x \in \mathbb{R}.$$

(c) **VERDAD** la solución general está (anti-derivada):

$$y(x) = \int_0^x |u|^n du + y(0)$$

y, dado el valor inicial $y(0)$, estas curvas son todas distintas.

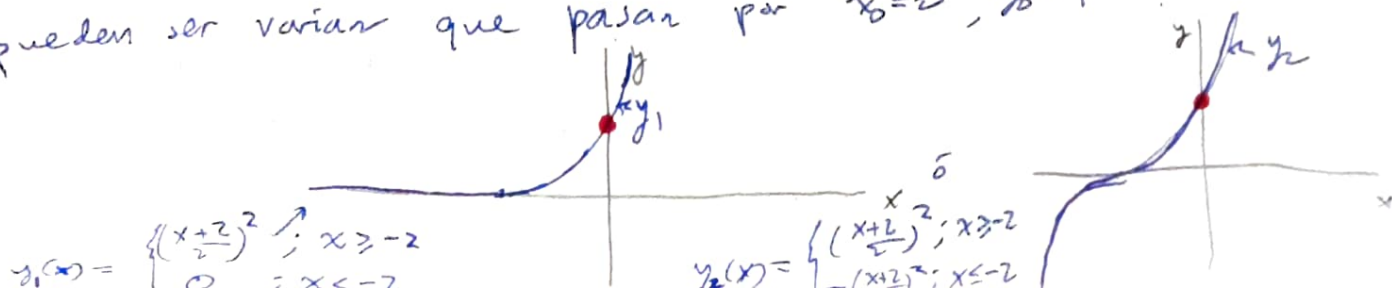
(d) **FALSO** por ejemplo, con $n=2$, tenemos soluciones por casos:

• $y > 0$: $x+a = \int \frac{dy}{y^{3/2}} = 2y^{1/2} \Rightarrow y = \left(\frac{x+a}{2}\right)^2$; $x \geq -a$

• también una solución: $y \equiv 0$.

• $y < 0$: $x+b = \int \frac{dy}{(-y)^{3/2}} = -2(-y)^{1/2} \Rightarrow y = -\left(\frac{x+b}{2}\right)^2$; $x \leq -b$

y pueden ser varias que pasan por $x_0=0, y_0=1$:



(3) Opción 1: Ponemos $v = \frac{dx}{dt}$ y tenemos la edo 13

$$a^2 \frac{d^2 v}{dt^2} + v = 0.$$

Cuando $a \neq 0$; ponemos $w = \frac{dv}{dt}$ y tenemos la edo:

$$0 = v + a^2 \frac{dw}{dt} = v + a^2 w \cdot \frac{dw}{dv} \quad \text{que es separable}$$

(regla de cadena)

$$\Rightarrow a^2 \int w dw + \int v dv = \text{const.} \Rightarrow a^2 w^2 + v^2 = b^2$$

algun constante

recordamos que $w = \frac{dv}{dt}$ y entonces tenemos:

$$a \frac{dv}{dt} = \sqrt{b^2 - v^2} \Rightarrow a \int \frac{dv}{\sqrt{b^2 - v^2}} = t + t_0$$

algun constante.

podemos evaluar la integral con la substitución $v = b \sin(\theta)$

$$\Rightarrow t + t_0 = a \int \frac{b \cos \theta d\theta}{b \cos \theta} = a \cdot \theta \Rightarrow \boxed{v = b \sin\left(\frac{t+t_0}{a}\right)}.$$

recordamos que $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{x = -ab \cos\left(\frac{t+t_0}{a}\right) + c}$

otra constante.

Las soluciones en el plano x, v son elipses con centros en el eje x (y ejes alineados con los ejes xv): $\frac{(x-c)^2}{a^2} + v^2 = b^2.$

Las soluciones son todas periódicas de periodo 2π cuando $a = \{1, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \dots\}$ $\left(\cos\left(\frac{2\pi + t_0}{a}\right) = \cos\left(\frac{t_0}{a}\right) \Leftrightarrow a = \frac{2}{n} \right)$

o cuando $a=0$ en este caso las soluciones son $v=0$, $x=\text{const.}$

Opción 2:

que

$$a^2 \frac{d^3 x}{dt^3} + \frac{dx}{dt} = 0$$

4

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[a^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + x \right] = 0 \Rightarrow a^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + x = b$$

alguna const.

entonces, cuando $a \neq 0$, podemos $v = \frac{dx}{dt}$, y (regla cadena):

$$b = x + a^2 \frac{dv}{dt} = x + a^2 v \cdot \frac{dv}{dx}, \text{ que es separable:}$$

$$\int (b-x) dx = a^2 \int v dv + \text{const.} \Rightarrow$$

$$a^2 v^2 + (x-b)^2 = c^2$$

alguna constante.

y recordamos que las soluciones en el plano xv son elipses con centro en el eje x (cuando $a \neq 0$). Aun cuando $a=0$ las soluciones son solamente $v=0$, $x=\text{const.}$

Para ver los periodos (cuando $a \neq 0$) tenemos $v = \frac{dx}{dt}$, que:

$$a \frac{dx}{dt} = \sqrt{c^2 - (x-b)^2} \Rightarrow a \int \frac{dx}{\sqrt{c^2 - (x-b)^2}} = t + t_0$$

y podemos evaluar la integral con $x-b = c \cdot \sin(u) \Rightarrow$

$$t + t_0 = au \Rightarrow x = b + c \cdot \sin\left(\frac{t+t_0}{a}\right) \text{ que tiene periodo } 2\pi$$

cuando $a \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ ó $a \in \mathbb{Z}$

como antes.

④ a) para $u = y/x$, o, $y = x \cdot u$ tenemos.

$$y' = u + xu' ; \quad y'' = u' + u' + xu'' = 2u' + xu''$$

y la e.do. (2) transformada esta:

$$2u' + xu'' = y'' = (xy' - y)^3 = (xu + x^2u' - xu)^3 = x^6(u')^3$$

o . $u''^{(2)} = -\frac{2}{x}u' + x^5(u')^3$, (una e.do tipo Bernoulli en u').

una substitución $u' = p^m \Rightarrow u'' = mp^{m-1}p'$ para la e.do transformada.

$$mp^{m-1}p' = -\frac{2}{x}p^m + x^5(p)^{3m} \Rightarrow mp' = -\frac{2}{x}p + x^5(p)^{2m+1}$$

seria lineal en p cuando $2m+1=0$, es decir $m = -\frac{1}{2}$,

con la e.do lineal:
$$-\frac{1}{2}p' = -\frac{2}{x}p + x^5$$

⑥ Usar factor integrante en la e.do lineal de parte a):

$$p' - \frac{4}{x}p = -2x^5 ; \quad p' = -\frac{4}{x}p \Rightarrow p = \frac{c}{x^4} ; \text{ ej. } p = \frac{1}{x^4}$$

$$\Rightarrow \frac{p'}{x^4} - \frac{4}{x^5}p = -2x = \left(\frac{p}{x^4}\right)' \Rightarrow \frac{p}{x^4} = c - x^2 \Rightarrow p = x^4(c - x^2)$$

algún const.

Ahora recordamos que $u' = (p)^{-\frac{1}{2}}$, o, $p = \frac{1}{(u')^2} \Rightarrow$

$$(u')^2 = \frac{1}{x^4(c - x^2)} \Rightarrow \frac{1}{x^4(c - x^2)} = \left(\frac{y' - y/x}{x}\right)^2 \quad \left[\text{usando } y' = u + xu' \right]$$

↪

4b, cont. | Ahora tenemos la edo:

16

$$\frac{1}{x^4(C-x^2)} = \left(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\right)^2, \quad \text{o,} \quad \frac{1}{C-x^2} = (xy' - y)^2$$

para encontrar el valor del constante C , ponemos $x=0, y=1, y'=0$

$\Rightarrow C=1$ y ahora tenemos la edo lineal:

$$xy' - y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad \text{con factor integrante } \mu = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} + \text{crt.}$$

Para evaluar el integral ponemos $\xi = -\frac{1}{x}$; $d\xi = +\frac{dx}{x^2}$

$$\text{y tenemos } \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = + \int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = + \int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} = + (\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} + \text{crt.} \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} + \text{crt.} \quad \text{que con la condici3n inicial } y(0)=1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \sqrt{1-x^2}}$$

Bonus: 1º) de $u' = \frac{1}{x^2\sqrt{C-x^2}}$ y similar subst. $\xi = -\frac{1}{x}$

obtenemos $u = \frac{y}{x} = \int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{C\xi^2-1}} = \frac{\sqrt{C\xi^2-1}}{C} + B$

$$\Rightarrow Cy = \sqrt{C-x^2} + BCx \Rightarrow C^2(y-Bx)^2 + x^2 = C.$$

est3n son elipses con centro en el origen (y Area constante).

Bonus 2º) diferenciar $y'' = (xy' - y)^3$ para tener: [7]

$$\begin{aligned} y''' &= 3(xy' - y)^2 [y' + xy'' - y'] = 3(xy' - y)^2 xy'' \\ &= 3x(y'')^{2/3} y'' = 3x(y'')^{5/3} \end{aligned}$$

Diferenciar una vez más para tener:

$$y'''' = 3(y'')^{5/3} + 5x(y'')^{2/3} y'''$$

Ahora, para la serie potenciamos hasta orden 4 tenemos:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (\text{dado})$$

$$\rightarrow y''(0) = (0 \cdot y'(0) - y(0))^3 = -1$$

$$y'''(0) = 3 \cdot 0 \cdot (y'')^{5/3} = 0$$

$$y''''(0) = 3(-1)^{5/3} + 5 \cdot 0 \cdot (-1)^{2/3} \cdot 0 = -3$$

$$\Rightarrow y(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{24}x^4 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \dots$$