**Instituto Tecnológico Autónomo de México**

**Departamento de Matemáticas**

**Sistemas dinámicos I (MAT-24210)** **Primavera 2026**

Examen final 28/05/2026 **Duración:** 2h.45m

**No está permitido el uso de material electrónico.**
**Responde de manera clara y concisa, justificando adecuadamente todas tus respuestas.**

1. Determine, usando la transformada de Laplace, una solución $f(t)$, $t \geq 0$ de la siguiente ecuación integral:
$$f(t) = t + \int_0^t uf(t-u)\, du$$

2. Considere la siguiente ecuación diferencial:
$$ny\, dx + x\, dy = 0$$
la cual depende de un parámetro entero $n \in \mathbb{Z}\backslash 0 = \{\pm 1, \pm 2, ...\}$.
   (a) Determine la solución con la condicion inicial $x_o = 0, y_o = 1$.
   (b) ¿Para cuáles valores de $n \in \mathbb{Z}\backslash 0$ existen soluciones, aparte del eje-$x$, en forma grafical $(x, y(x))$ definidas sobre todo el eje-$x$?

3. Para la siguiente e.d.o.:
$$(*) \qquad xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 0, \quad (x > 0)$$
   (a) determine una función $\mu(x)$ tal que, al multiplicar $(*)$ por $\mu(x)$, la ecuación $(*)$ se transforme a la forma
$$(**) \qquad \frac{d}{dx}\left(x\mu(x)\; y' + (1-x)\mu(x)\; y\right) = 0$$
   (b) Determine la solución general de $(*)$.

4. Determine condiciones sobre los parámetros $a \in [0,3]$, $b \in [0, \pi]$ tales que la e.d.o.
$$y'' + a^2 y = f(t), \qquad f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, b] \\ 0, & t \in (b, \pi] \end{cases},$$
admita infinitas soluciones con $y(0) = y(\pi) = 0$.

**Cada pregunta tiene el siguiente valor:**

| 1 | 2.(a) | 2.(b) | 3.(a) | 3.(b) | 4. |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 5 | 5 | 5 | 5 | 10 |

$$F(s) = (\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

| $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$ | $F = \mathcal{L}f$ |
|---|---|
| $f'(t)$ | $sF(s) - f(0)$ |
| $tf(t)$ | $-F'(s)$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ |
| $e^{at}f(t)$ | $F(s-a)$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $\cos bt$ | $\frac{s}{s^2+b^2}$ |
| $\sin bt$ | $\frac{b}{s^2+b^2}$ |
| $(f * g)(t)$ | $F(s)G(s)$ |
| $H(t-a)f(t-a)$ | $e^{-as}F(s)$ |

Tabla de unas transformadas de Laplace común (sobre dominios apropiados).

Soluciones: Examen final

**1** Aplicamos transformada de Laplace para tener:

$$F(s) = (\mathcal{L}f)(s) = \mathcal{L}\{t\}(s) + \mathcal{L}\left\{\int_0^t u\, f(t-u)\,du\right\}(s)$$

y notamos $\int_0^t u\, f(t-u)\,du$ es la convolución de $f(t)$ con $t$

donde sabemos $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$, entonces usando $\mathcal{L}\{f*g\} = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g)$,

tenemos:

$$F = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}\cdot F \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{s^2}\right)F = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right), \text{ ó:}$$

$$\mathcal{L}f = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}[e^t - e^{-t}]\right) \Rightarrow \boxed{f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh(t).}$$

---

**2** (a) Haciendo separación de variables:

$$\frac{n}{x}\,dx + \frac{1}{y}\,dy = 0 \iff \log x^n + \log y = cst.$$

tenemos las curvas integral como conjuntos nivel:

$$x^n y = c = cst.$$

Tomando en cuenta que buscamos la curva integral que pasa por el punto $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, debemos tener:

$$x^n y = 0 \quad (n>0) \qquad \text{ó} \qquad 0 = x^{-n} y^{-1} \quad (n<0)$$

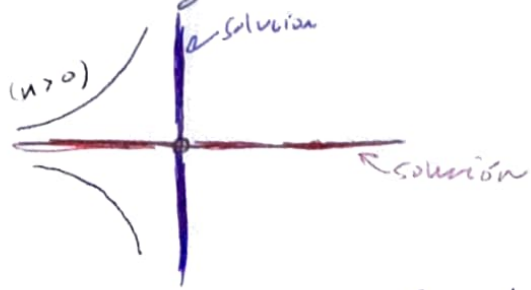
que implica la curva integral consiste en los ejes:

$$x = 0 \quad , \text{ó} \quad y = 0.$$

Como nuestras condi inicial tienen $x_0=0$, $y_0=1\neq 0$ la solución buscada es el eje-$y$:

$$\boxed{x = 0}$$

que tambien es facil ver geometricalmente considerando el campo de lineas:




(b) ya encontramos en parte (a) la formula implicita para las curvas integral: $x^n y = \text{cst}.$

las soluciones en forma grafica sobre eje-$x$ entonces son:

$$y = \frac{c}{x^n} = c \cdot x^{-n}$$

y son definidos para todos $x \in \mathbb{R}$ solamente cuando $n<0$:

$$\boxed{n \in \{-1, -2, -3, \dots\}}$$

$\boxed{3}$ (a) buscamos $\mu(x)$ tal que:

$$\mu \cdot x \cdot y'' + 2\mu \cdot (1-x) y' + \mu \cdot (x-2) y$$

$$= (\mu \cdot x y' + \mu \cdot (1-x) y)' = \mu \cdot x y'' + (\mu x)' y' + \mu \cdot (1-x) y' + (\mu (1-x))' y$$

$$= \mu \cdot x y'' + [\mu + x\mu' + (1-x)\mu] y' + (\mu'(1-x) - \mu) y$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(1-x)\mu = x\mu' + (2-x)\mu \ , \ y, \quad (x-2)\mu = (1-x)\mu' - \mu$$

$$\Leftrightarrow \quad -x\mu = x\mu' \ , \ y, \quad (x-1)\mu = (1-x)\mu'$$

ó queremos $\mu' = -\mu$ $(x>0)$.

es decir $\boxed{\mu = e^{-x}}$ por ejemplo.

(b) De parte (a), el e.d. original es equivalente a:

$$0 = \frac{d}{dx}\left( x e^{-x} y' + (1-x) e^{-x} y \right)$$

notamos que $(xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$, y entonces:

$$0 = \frac{d}{dx}\left( x e^{-x} y' + (xe^{-x})' y \right) = \frac{d^2}{dx^2}\left( x e^{-x} y \right)$$

$$\Rightarrow \quad x e^{-x} y = c_1 + c_2 x \Rightarrow \boxed{y = e^{x}\left( \frac{c_1}{x} + c_2 \right)}$$

4 Aplicamos transformada de Laplace para obtener

$$(\mathcal{L}y'')(s) + a^2(\mathcal{L}y)(s) = (\mathcal{L}f)(s) = F(s)$$

donde para $Y(s) = (\mathcal{L}y)(s)$ con $y(0) = 0$ y $y'(0)$ a ser determinado

tenemos:

$$(\mathcal{L}y')(s) = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

$$(\mathcal{L}y'')(s) = s(\mathcal{L}y')(s) - y'(0) = s^2Y(s) - y'(0)$$

entonces tenemos:

$$(s^2+a^2)Y = y'(0) + F(s) \Rightarrow Y = \frac{y'(0)}{s^2+a^2} + \frac{F(s)}{s^2+a^2}.$$

Recordando que $\mathcal{L}\{\sin(at)\}(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$ y

$\frac{1}{s^2+a^2} \cdot F(s) = \mathcal{L}\{f * g\}$ donde $g = \frac{\sin(at)}{a}$, tenemos:

$$\boxed{y(t) = \frac{y'(0)}{a}\sin(at) + \int_0^t f(u)\cdot\frac{\sin(a(t-u))}{a}\,du \qquad (a \neq 0).}$$

( donde, recordemos $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, b) \\ 0 & t \in [b, \pi] \end{cases}$ ).

Entonces, la condición para que $y(0) = 0$, y $y(\pi) = 0$

está:

$$0 = y(\pi) = \frac{y'(0)}{a}\sin(a\pi) + \frac{1}{a}\int_0^{\pi} f(u)\sin[a(\pi-u)]\,du$$

entonces, cuando $\sin(a\pi) \neq 0$ tenemos única solución con $y(0)=0$, y, $y(\pi)=0$ que corresponde a eligiendo

$$y'(0) = -\frac{1}{\sin(a\pi)} \int_0^{\pi} f(u) \sin a(\pi-u)\, du .$$

Para tener infinitas soluciones con $y(0)=0$, y, $y(\pi)=0$ es necesario que:

$\sin(a\pi)=0$, es decir que $a \in [0,3]$, debemos tener $a \in \{0,1,2,3\}$.

Notar que cuando $a=0$ tenemos:

$$y = y'(0)\cdot t + \int_0^t f(u)\cdot(t-u)\,du$$, y la única solución con $y(0)=0$, $y(\pi)=0$ es con $y'(0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(u)\cdot(\pi-u)\,du$.

Entonces para tener infinitas soluciones con $y(0)=0$ y $y(\pi)=0$ es necesario que:

$$\boxed{a \in \{1,2,3\}}$$

Para ver las condiciones sobre $b \in [0,\pi]$ necesitamos; dado $a \in \{1,2,3\}$:

$$0 = y(\pi) = \frac{1}{a}\int_0^{\pi} f(u) \sin(a(\pi-u))\,du = \frac{1}{a}\int_0^{b} \sin(a(\pi-u))\,du$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \int_0^{b} \sin(au)\,du \Leftrightarrow \cos(ab) = 1 \Leftrightarrow ab \in \{0, 2\pi, 4\pi, \dots\}$$

y tenemos los valores:

$$\boxed{\begin{array}{l} a=1,\ b=0 \\ a=2,\ b=0,\pi \\ a=3,\ b=0,\frac{2\pi}{3} \end{array}}$$

(ya que $b \in [0,\pi]$).