
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Sistemas dinámicos I (MAT-24210) Primavera 2026

Primer examen 25/02/2026

Duración: 90m

No está permitido el uso de material electrónico.

Responde de manera clara y concisa, justificando adecuadamente todas tus respuestas.

1. Considera un sistema de la forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son constantes, con $b \neq 0$.

(a) Cuando $a = -c$, ¿ es posible que *todas* las soluciones tiendan al origen cuando $t \rightarrow \infty$?

(b) Cuando $a = c$, ¿ es posible que *todas* las soluciones tiendan al origen cuando $t \rightarrow \infty$?

(Recuerda justificar tus respuestas).

2. Considera el siguiente e.d.o. de primer orden:

$$(*) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{1+x}y - (1+a)y^2$$

la cual depende de un parámetro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Encuentra una sustitución apropiada de la forma $y = Y^n$ que transforme $(*)$ en una e.d.o. lineal en Y .

(b) Encuentra la solución de $(*)$ con condición inicial $y(0) = 1$ y determina el intervalo máximo de existencia de esta solución.

(c) Cuando $a = 1$, encuentra la solución de $(*)$ con condición inicial $y(0) = 1/2$ y determina el intervalo máximo de existencia de esta solución.

3. Considera la siguiente e.d.o.:

$$3x^3y^2dx - 2xy^3dy = 0.$$

(a) Determina si existe un factor integrante de la e.d.o. que dependa solamente de x . (Recuerda justificar tu respuesta).

(b) Usa un factor integrante para describir las soluciones generales de esta e.d.o. como curvas implícitas.

(Sugerencia: Existen factores integrantes de la forma $\mu = x^n y^m$.)

(c) ¿ Cuántas soluciones en forma gráfica sobre el eje x (es decir, de la forma $y = f(x)$) pasan por el origen? ¿ Cuántas soluciones en forma gráfica sobre el eje y (es decir, de la forma $x = g(y)$) pasan por el origen?

Cada pregunta tiene el siguiente valor:

1.a	1.b	2.a	2.b	2.c	3.a	3.b	3.c
5	5	4	3	3	4	3	3

Soluciones Examen 1

1(a)

El comportamiento de las soluciones mientras $t \rightarrow \infty$ esta controlado por los signos ($\pm$) de los valores propios (autovalores) del matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Estos valores son raíces de:

$$0 = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$$

$$\Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4ac + 4b^2}}{2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

Entonces cuando $a = -c$ tenemos:

$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$$

y ($b \neq 0$) siempre hay un valor propio positivo $\lambda_+ = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$

con solución $e^{\lambda_+ t} \vec{v}_+ \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, para que

nunca sea posible tener todas soluciones tiendan al origen cuando $t \rightarrow \infty$.

1(b) De la computación en (a), cuando $a = c$ tenemos valores propios: $\lambda_{\pm} = a \pm b$.

Para que todas soluciones tiendan al origen cuando $t \rightarrow \infty$ es suficiente tener $a+b < 0$, y, $a-b < 0$; es decir

si es posible, cuando $a \leq -|b|$ [las soluciones general serán de la forma $c_1 e^{\lambda_+ t} \vec{v}_+ + c_2 e^{\lambda_- t} \vec{v}_-$ con $\lambda_+ < 0, \lambda_- < 0$]

2(a) Substituir: $y = Y^n$, para tener:

$$n Y^{n-1} \frac{dY}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{1+x} Y^n - (1+a) Y^{2n}$$

$$\Rightarrow n \frac{dY}{dx} = \frac{a}{1+x} Y - (1+a) Y^{1+n}$$

que sería un e.d.o. lineal en Y cuando $n = -1$.

2(b) De parte (a) sabemos que el cambio de variable $y = \frac{1}{Y}$ convierte el e.d.o. original al e.d.o. lineal:

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{a}{1+x} Y + (1+a)$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dx} + \frac{a}{1+x} Y = 1+a ; \quad \text{y para factor integrante:}$$

$$\mu' = \frac{a}{1+x} \mu \leadsto \log \mu = \log (1+x)^a + \text{const.}$$

$$\leadsto \mu = (1+x)^a$$

$$\text{obtenemos: } \frac{d}{dx} \left((1+x)^a Y \right) = (1+a) (1+x)^a$$

$$\Rightarrow (1+x)^a Y = (1+x)^{1+a} + C$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{y} = 1+x + \frac{C}{(1+x)^a}$$

Para la solución con valor inicial $y(0) = 1$ ($x=0, y=1$),

tenemos: $1 = 1 + c \Rightarrow c = 0$ y la solución particular

con $y(0) = 1$ es: $\frac{1}{y} = 1 + x \Rightarrow$

$$\underline{y = \frac{1}{1+x}}, \text{ definido por } \underline{x \in (-1, \infty)} \quad (x=0 \text{ en dominio}).$$

2(c) Para $a=1$, y $y(0) = \frac{1}{2}$ ($x=0, y=\frac{1}{2}$) tenemos de (b)

la solución general $\frac{1}{y} = 1 + x + \frac{c}{1+x}$; $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 = 1 + c \Rightarrow \underline{c=1}$

y la solución particular: $y = \frac{1}{1+x + \frac{1}{1+x}} = \frac{1+x}{(1+x)^2 + 1}$ definido por

todo $x \in \mathbb{R}$ ($((1+x)^2 + 1 > 0$).

3(a) Si $\mu(x)$ fue un factor integrante que depende solamente de x , tenemos que satisfacer:

$$\frac{\partial}{\partial y} (3x^2 y^2 \cdot \mu(x)) = \frac{\partial}{\partial x} (-2xy^3 \cdot \mu(x))$$

$$\Rightarrow 6x^2 y \cdot \mu(x) = -2y^3 \mu(x) - 2xy^3 \mu'(x)$$

$$\Rightarrow 6x^2 y + 2y^3 = -2xy^3 \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$$

$$\Rightarrow -\frac{3x^3}{y^2} - 1 = x \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} \Rightarrow -\frac{3}{y^2} = \frac{1 + x \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}}{x^3} \quad \text{para todo } x, y,$$

lo que es imposible (el lado izquierdo $-\frac{3}{y^2}$ depende solamente de y y el lado derecho $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$ depende solamente de x).

Más preciso si tomamos derivada respecto a y de los dos

lados del $-\frac{3}{y^2} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$ llegamos a:

$$\frac{6}{y^3} = 0 \quad \forall x, y; \text{ que es contradicción. Entonces}$$

no puede existir tal factor integrante $\mu(x)$ que depende solamente de x .

3(b) Escalando el edo por $\mu = x^n y^m$ conduce a:

$$3x^{3+n}y^{2+m}dx - 2x^{1+n}y^{3+m}dy = 0$$

y podemos observar sería exacta (separada) cuando $m=-2, n=-1$.

Más precisamente podemos considerar la condición:

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^{3+n}y^{2+m}) = \frac{\partial}{\partial x}(-2x^{1+n}y^{3+m})$$

$$\Rightarrow 3x^{3+n}y^{1+m}(2+m) = -2x^n y^{3+m}(1+n)$$

$$\Rightarrow 3x^3(2+m) = -2y^2(1+n) \quad \forall x, y \Rightarrow m=-2, n=-1$$

y nuestro factor integrante es:

$$\mu = \frac{1}{xy^2}$$

Después re-escalar por $\mu = \frac{1}{xy^2}$ tenemos:

$$3x^2 dx - 2y dy = 0$$

y las soluciones conjuntas nivel de φ con $\varphi_1 = 3x^2$, $\varphi_2 = -2y$

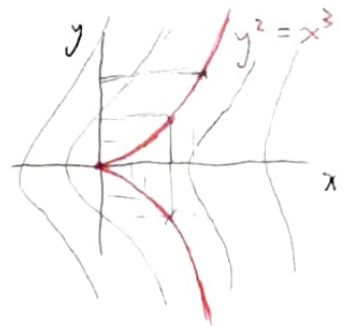
$\Rightarrow \varphi = x^3 - y^2$, ó las solución general como curvas implícitas

$$\boxed{y^2 = x^3 + c}$$

para c constante.

3(c) La solución pasando por el origen $x=0, y=0$ tiene $c=0$

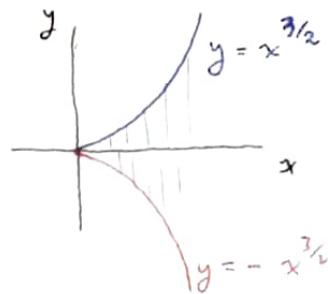
$\rightarrow y^2 = x^3$ como curva implícita



• como gráfica sobre eje "x" hay dos formas:

$$y = x^{3/2}$$

$$\text{ó } y = -x^{3/2} \quad (\text{para } x \geq 0).$$



• como gráfica sobre eje "y" hay una forma:

$$\boxed{x = y^{2/3}} \quad (\text{para } y \in \mathbb{R})$$

