

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Sistemas dinámicos I (MAT-24210)

Primavera 2026

Repaso antes examen 1 (soluciones explicitas)

Unos problemas para practicar:

1. Considera el siguiente e.d.o.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{ax}{1-x^2}y = x$$

que depende por el parametro $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Cuando $a \neq 2$, verifica que hay solución con valor inicial $y(0) = \frac{1}{a-2}$ que esta definida para todo $x \in \mathbb{R}$.
 - (b) Cuando $a = -1$, que es el intervalo máximo de existencia de la solución con $y(0) = 0$? Que es el intervalo máximo de existencia de la solución con $y(\sqrt{2}) = 0$?
 - (c) Cuando $a = 4$, que es el intervalo máximo de existancia de la solución con $y(0) = 0$?
2. Consider un e.d.o. de la siguiente forma:

$$x^k y^l dx + x^m y^n dy = 0$$

con algunos constantes k, l, m, n .

- (a) Existe un factor integrante del e.d.o. que depende solamente de x ? De y ? Cuando tal factor integrante existe, encuentralo, y cuando no, explica porque no.
 - (b) Encuentra un factor integrante del e.d.o. y determina la formula implicita para sus curvas integrales.
3. Considera el e.d.o.

$$x dx - xy dy = 0$$

Cuantos soluciones gráficar sobre el eje x (un solución de la forma $y = f(x)$ definido por x en algun intervalo maximal) pasan por el origen? Cuantos soluciones gráficar sobre el eje y (un solución de la forma $x = g(y)$ definido por y en algun intervalo maximal) pasan por el origen?

4. Dado un e.d.o. de 2ºda orden de la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)$$

verifica que es posible re-escalar el e.d.o. por un factor apropiado para que la e.d.o. tiene la forma:

$$\frac{d}{dx} \left(\mu(x) \frac{dy}{dx} \right) + \alpha_1(x)y = \beta(x).$$

5. Para el siguiente ecuación diferencial:

$$2y dy/dx = 2y^2 + x^2 + 1$$

encuentra un cambio de variable $y = Y^n$ apropiado para convertir tal ecuacion diferencial a un ecuacion diferencial lineal en Y , despues encontrar su solución general como curva implicita.

6. Para el siguiente ecuación diferencial:

$$dy/dx = \frac{y}{3x} + \frac{1}{y^2}$$

encuentra un cambio de variable $u = y/x^m$ apropiado para convertir tal ecuación diferencial a una ecuación diferencial separable en u , después encontrar su solución general como curva implícita

7. Considera el siguiente e.d.o. de 2º orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = x^2y$$

- (a) Encuentra un ‘factor integrante’ $\mu(x)$ tal que al re-escalar el e.d.o. por $\mu(x)$ se convierte en la forma: $\frac{d}{dx} \left(\mu(x) \frac{dy}{dx} \right) = \mu(x)x^2y$.
- (b) Verifica que después un cambio de variable $x \mapsto f(x) = X$ tal que $\frac{dX}{dx} = \frac{1}{\mu(x)}$, el e.d.o. se transforma a la forma: $\frac{d^2y}{dX^2} = y$. Encuentra la solución general a este e.d.o. transformado.
- (c) Encuentra la solución del e.d.o. original con condición inicial $y(1) = 1, y'(1) = 0$.

8. Verdad o falso: dado un sistema lineal $d\mathbf{x}/dt = A\mathbf{x}$ (con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$):

- (a) si todos los valores propios λ de la matriz A son reales, y negativos ($\lambda < 0$), entonces todas las soluciones de tal sistema limitan al origen mientras $t \rightarrow \infty$? Mientras $t \rightarrow -\infty$?
- (b) si todos los valores propios λ de la matriz A son reales, y positivos ($\lambda > 0$), entonces todas las soluciones de tal sistema limitan al origen mientras $t \rightarrow \infty$? Mientras $t \rightarrow -\infty$?
- (c) si los valores propios λ de la matriz A son reales, pero tienen signos mixtos (existe valor propio $\lambda_1 < 0$ y valor propio $\lambda_2 > 0$), entonces todas las soluciones limitan al origen mientras $t \rightarrow \infty$? Mientras $t \rightarrow -\infty$?

9. Considera un sistema de la forma: $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes.

- (a) Verdad o falso: cuando $a > b$ todas las soluciones limitan al origen cuando $t \rightarrow \infty$? Cuando $t \rightarrow -\infty$?
- (b) Encuentra las soluciones explícitas a tal sistema cuando $a = b \neq 0$, haz un dibujo de las soluciones en el plano xy .

RESUMIENDO LAS TÉCNICAS:

La tema general del primer parte es que dado ciertas ecuaciones diferenciales de forma particular, hemos visto algunas maneras para encontrar soluciones explicitas. Ademas, en estos ejemplos, podemos precisar sobre soluciones con especificas condiciones iniciales, o especificar el dominio (intervalo maximal) en que tales soluciones explicitas son definidas.

- ECUACIONES SEPERABLES ($\approx$ ch. 2.2 de Boyce-DiPrima): $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, tenemos su solucion en forma implicita hasta calcular las anti-derivadas: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + cst.$

Por ejemplo: $dy/dx = xe^y \implies \int e^{-y} dy = \int x dx + cst. \implies e^{-y} = c - \frac{x^2}{2}$ seria la solución general como curva implicita. Para la solución con condicion inicial $y(0) = 0$ tenemos $c = 1$ y nuestra solución particular esta la curva implicita $e^{-y} = 1 - \frac{x^2}{2}$. Notamos que debido a $e^{-y} > 0$ los valores de x son restringido a $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Para tales volares de x , esta solución esta dado por la gráfica $y = -\log(1 - \frac{x^2}{2})$ sobre $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (el dominio maximal de esta solución).

- FACTOR INTEGRANTE ($\approx$ ch. 2.6 de Boyce-DiPrima): dado e.d.o. en forma $a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$, tenemos su solucion en forma implicita $\varphi(x, y) = cst.$, si logramos encontrar funciones $\mu(x, y), \varphi(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu a, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu b$$

(el función μ llamamos el factor integrante). Debido a que las parciales de φ conmutan, intentamos buscar tal $\mu(x, y)$ por resolver:

$$\frac{\partial(\mu a)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu b)}{\partial x}.$$

Por ejemplo: $x^2 y dx + x y^2 dy = 0$, en tomar $\mu = \frac{1}{xy}$ tenemos $\mu a = x, \mu b = y$ y entonces $(\mu a)_y = 0 = (\mu b)_x$, y las curvas integrales de este campo de lineas estan por conjuntos nivel de $\varphi(x, y)$ con $\varphi_x = x, \varphi_y = y \implies \varphi = \frac{x^2 + y^2}{2}$. Notar: este ejemplo podriamos resolver por seperación de variables en escribirlo como $dy/dx = -x/y$. Estrictamente hablando el campo de lineas $x^2 y dx + x y^2 dy = 0$ no esta definido en los ejes (cuando $x = 0$ o $y = 0$) pero, aparte el origen, se exitende naturalmente sobre estas puntos despues re-escalar por el factor $\mu = \frac{1}{xy}$ como $x dx + y dy = 0$ (bien definido en los ejes, y solo con $x = 0$, e $y = 0$ por punto singular).

- ECUACIONES LINEAL (1'ER ORDEN) ($\approx$ ch. 2.1 de Boyce-DiPrima): un caso particular del último punto son las ecuaciones lineales: $dy/dx + a(x)y = b(x)$, donde buscar un factor integrante es equivalente a buscar un function $\mu(x)$ que despues escalando el e.d.o. por μ convierte el lado izquierda en un derivada total (regla producto): $\mu y' + a\mu y = \mu b$ es de la forma $(\mu y)' = \mu b$ cuando $\mu' = a\mu$, es decir $\mu = e^{\int a(x)dx + cst.}$. Para tal factor integrante obtenemos $\mu y = \int \mu b dx + cst.$, o alternativamente $y = \frac{\int \mu b dx + cst.}{\mu}$ para nuestro solucion general.

Por ejemplo: $y' + xy = xe^{-x^2/2} \implies \mu y' + x\mu y = x\mu e^{-x^2/2}$, y para $\mu' = x\mu$, o $\mu = e^{x^2/2}$ tenemos $(e^{x^2/2}y)' = x \implies e^{x^2/2}y = \frac{x^2}{2} + c \implies y = e^{-x^2/2}(\frac{x^2}{2} + c)$ para nuestro solucion general.

- CAMBIO DE VARIABLE (SUBSTITUCIÓN): dado algún e.d.o. (por ejemplo $adx + bdy = 0$) uno puede intentar cambiar variables $x = F(X, Y)$, $y = G(X, Y)$ y esperar que el e.d.o. transformada $((aF_X + bG_X)dX + (aF_Y + bG_Y)dY = 0)$ sería posible resolver.

Por ejemplo: Un ecuación de Bernoulli $dy/dx = y + xy^3$, en sustituir $u = y^{-2}$ obtenemos $du/dx = -2y^{-3}(dy/dx) = -2y^{-3}(y + xy^3) = -2(y^{-2} + x) = -2u - 2x$, que es un e.d.o. lineal en u : $u' + 2u = -2x \implies e^{2x}u = -2 \int xe^{2x}dx + cst. = -xe^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + cst.$ (integración por partes), y nuestra solución general es la curva implícita: $y^{-2} = u = \frac{1}{2} - x + ce^{-2x}$.

También por ciertos e.d.o. 2º da orden sustituir $p = dy/dx$, convierte tal e.d.o. de 2º da orden a un e.d.o. de 1º orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx}) \rightarrow \frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g(y, \frac{dy}{dx}) \rightarrow p \frac{dp}{dy} = g(y, p).$$

Por ejemplo: $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$, $p = dy/dx \implies p \frac{dp}{dy} = -y \implies p^2 + y^2 = a^2 \implies \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \int dx + cst. \implies y = a \cos(x + c)$ es nuestra solución general (para a, c constantes).

- ECUACIONES IMPLÍCITAS: dado en e.d.o. implícita $F(x, y, p) = 0$, $p = \frac{dy}{dx}$ hemos notado que si logramos poner tal ecuación implícita en la forma $y = f(x, p)$ entonces diferenciando con respecto al x tenemos un e.d.o. 1º orden: $p = f_x + f_p \frac{dp}{dx}$. Cualquier solución a tal e.d.o. 1º orden $p(x)$ determina solución $y(x) = f(x, p(x))$ al e.d.o. implícita original.

Similar si logramos poner tal ecuación implícita en la forma $x = g(y, p)$, diferenciamos con respecto al y para tener e.d.o. 1º orden $1 = p(g_y + g_p \frac{dp}{dy})$. Cualquier solución a tal e.d.o. 1º orden $p(y)$ determina solución $x(y) = g(y, p(y))$ al e.d.o. implícita original.

Por ejemplo: $y = x - p^2 \implies p = 1 - 2pp' \implies \int \frac{2p}{1-p} dp = \int dx + cst. \implies x = c - 2(p + \log(1 - p))$, para tener las soluciones como curvas parametrizadas (por p): $p \mapsto x(p) = c - 2(p + \log(1 - p)), y(p) = c - 2(p + \log(1 - p)) - p^2$.

- SOLUCIONES APROXIMAS ($\approx$ ch. 2.8 de Boyce-DiPrima): hemos visto la técnica de series y iteración de Picard-Lindelöf para obtener aproximaciones a soluciones de e.d.o. por diferenciando repetitivamente el e.d.o. (para sacar recursivamente coeficientes de series), o por integrando repetitivamente el e.d.o. (la iteración de Picard-Lindelöf). También sabemos que bajo condiciones apropiados sobre el e.d.o. tales secuencias aproximando soluciones convergen a solución única de tal e.d.o.
- SISTEMAS LINEAL ($\approx$ ch. 3 de Boyce-DiPrima): hemos considerado los mas sencillos ejemplos de sistemas lineales de forma $d\mathbf{x}/dt = A\mathbf{x}$ (con $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal), y para el caso planar $n = 2$. La técnica general es buscar un base conveniente en que la sistema descopla, generalmente basado en encontrar los espacios propios del transformación lineal A .

Por ejemplo: La sistema $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, (o, por componentes: $x' = 2x + y$, $y' = x + 2y$).

Encontramos los valores/vectores propios: $\lambda_1 = 3, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $\lambda_2 = 1, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ para que la solución general es de la forma: $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^t \mathbf{v}_2$ donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ son constantes.

Alternativamente, cambiamos variable al base de vectores propios por $X\mathbf{v}_1 + Y\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, es decir $X + Y = x, X - Y = y$ con inverso $2X = x + y, 2Y = x - y$, y en esas nuevas variables, la sistema se desacopla: $X' = 3X, Y' = Y$.