Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Sistemas dinámicos I (MAT-24210) **Primavera 2026**

Segunda examen 22/04/2026 **Duración:** 90m

No está permitido el uso de material electrónico.
Responde de manera clara y concisa, justificando adecuadamente todas tus respuestas.

1. Considere la e.d.o.:

$$y'' + 8y' + 16y = 2ae^{-4x}$$

que depende de un parámetro $a \in \mathbb{R}$. Use el método de variación de constantes para encontrar la solución particular $y_p(x)$ con valores iniciales $y_p(0) = 1, y_p'(0) = -5$. ¿ Para cuáles valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ sería esta solución particular positiva para todo $x > 0$?

2. Encuentra la solución general de la siguiente e.d.o.:

$$\frac{x^2}{x+2}y''' - xy'' + y' = 0, \quad (x > 0)$$

dado que $y_1(x) = \frac{1}{2}x^2$ es una solución particular.

Comentario: Tenemos aquí una e.d.o. lineal de segundo orden en $u = y'$.

3. ¿ Verdadero o falso?

(a) *Cada* solución de la e.d.o. $y'' - y' + x^2 y = 0$ cumple que $y(x) \to 0, y'(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.

(b) Si $y(x)$ es una solución de una e.d.o. de la forma $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ con

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(x) > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in (0,1)$$

entonces $y'(1) < 0$.

Comentario: Recuerda justificar tus respuestas.

Cada pregunta tiene el siguiente valor:

1.	**2.**	**3.(a)**	**3.(b)**
10	10	5	5

Soluciones examen 2

① Primer resolvemos ala e.d.o. homogenea:

$$y_0''' + 8y_0'' + 16y_0 = 0$$

que tiene polinomio characteristico : $0 = \lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda+4)^2$

y entonces solucion general : $y_0 = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$

aplicando método de variación de constantes, buscamos $c_j(x)$ tal que:

$$\begin{cases} c_1' e^{-4x} + c_2' x e^{-4x} = 0 \\ c_1'(-4e^{-4x}) + c_2'(-4xe^{-4x} + e^{-4x}) = 2ae^{-4x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} c_1' + c_2' x = 0 \\ c_2' = 2a \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1' = -2ax \rightsquigarrow c_1 = -ax^2 + ct. \\ c_2(x) = 2ax + cst. \end{array}$$

y nuestra solucion general esta.

$$y(x) = 2ax^2 e^{-4x} - ax^2 e^{-4x} + a_2 x e^{-4x} + a_1 e^{-4x}$$

$$= (a_1 + a_2 x + ax^2) e^{-4x}$$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ son constantes.

Para cumplir con las condiciones iniciales tenemos:

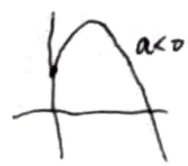
$$\left.\begin{aligned} 1 &= y(0) = a_1 \\ -5 &= y'(0) = a_2 - 4a_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= -1 \end{aligned}$$

y nuestra solucion particular es:

$$\boxed{y_p(x) = (1 - x + a x^2)\, e^{-4x}}$$

Para que esta positiva para toda $x > 0$, debemos tener el parametro $a \in \mathbb{R}$ tal que $1 - x + a x^2 > 0 \ \forall x > 0$.

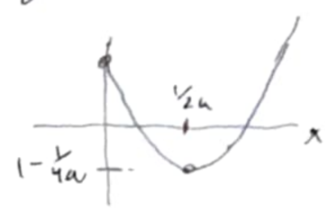
entonces necesariamente, al menos $a > 0$:



y para $a > 0$ tenemos el minimo (vertice) del parabola en $x_v = \frac{1}{2a}$, con el valor:

$1 - \frac{1}{2a} + \frac{a}{4a^2} = 1 - \frac{1}{4a}$ que es mayor que 0 si y solo si

$$\boxed{a > \frac{1}{4}}$$



② Ponemos $u = y'$, y tenemos una ed.o. lineal 2^{do} orden:

$$\frac{x^2}{x+2} u'' - x u + u = 0$$

con solución particular $u_1 = x = y_1'$. Aplicamos reducción de orden en poner

$$\begin{cases} u = c(x) \cdot u_1 = c(x) \cdot x \\ u' = c' x + c \\ u'' = c'' x + 2c' \end{cases}$$

y sustituyendo:

$$\frac{x^2}{x+2}\left(x \cdot c'' + 2c'\right) - x\left(xc' + c\right) + x \cdot c = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{x+2} c'' + \left(\frac{2x^2}{x+2} - x^2\right) c' = 0$$

$$\left[\frac{2x^2}{x+2} - x^2 = \frac{2x^2 - x^2(x+2)}{x+2} = -\frac{x^3}{x+2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{x+2} c'' = \frac{x^3}{x+2} c' \Leftrightarrow c'' = c' \Leftrightarrow \frac{c''}{c'} = 1$$

$$\Leftrightarrow (\log c')' = 1 \Leftrightarrow c' = ae^x \Leftrightarrow c = ae^x + b$$

(a, b constantes).

entonces tenemos soluciones general:

$$y' = u = c_1 x + c_2 x e^x$$

y ahora integramos para tener:

$$y = c_0 + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \int x e^x \, dx$$ (integración por partes)

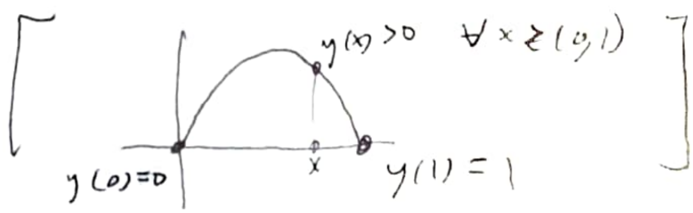
$$\boxed{y = c_0 + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 (x-1)e^x}$$

3 (a) $\boxed{\text{Falso}}$ podemos ver en considerar el wronskiano

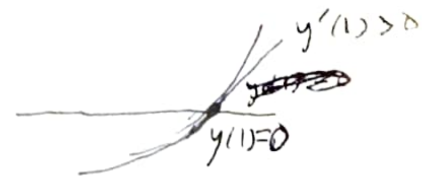
$W(x) = w_0 e^x$ $\underbrace{\text{va a } \pm\infty}_{(1)}$ mientras $x \to \infty$ ($w_0 \neq 0$).

en particular, si $y_1(x)$, $y_2(x)$ estaban dos soluciones independientes que tenían $y_j(x) \to 0$, $y_j'(x) \to 0$ (mientras $x \to \infty$) entonces su wronskiano iba a tener $W = y_1 y_2' - y_1' y_2 \to 0$, que debido a (1) es imposible.

(b) $\boxed{\text{Verdad}}$ notamos que $y'(1) > 0$ es imposible, por que esto implicaría $y(x) < 0$ algún $x \in (0,1)$ en contra de hipótesis $y(x) > 0 \ \forall x \in (0,1)$



Tampoco es posible que $y'(1) = 0$ por que ya tenemos $y(1)=0$ y por unicidad de soluciones la única manera



que $y(1)=0$ y $y'(1)=0$ sería si $y(x) \equiv 0 \ \forall x$, que también esta en contra de hipótesis $y(x) > 0 \ \forall x \in (0,1)$. Entonces la única que queda posible este $y'(1) < 0$.