

## Contents

<b>1</b>	<b>ejercicios</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>una e.d.o. 1'er orden</b>	<b>5</b>
2.1	e.d.o. seperables, lineales . . . . .	6
2.2	factor integrante, cambio de variables . . . . .	6
<b>3</b>	<b>sistemas e.d.o. lineal</b>	<b>8</b>
3.1	sistemas e.d.o. lineal autonoma . . . . .	9
3.2	sistemas e.d.o. lineal no-autonoma . . . . .	10
3.3	sistemas e.d.o. lineal no homogenea (variación de parámetros) . .	11
<b>4</b>	<b>transformada de Laplace</b>	<b>12</b>
4.1	unas transformaciones de Laplace (una tablita) . . . . .	13
<b>A</b>	<b>temas extra</b>	<b>14</b>
A.1	simetrías y integrabilidad . . . . .	14
A.2	unas teoremas de comparación . . . . .	15
A.3	teoremas de existencia/unicidad . . . . .	16
A.4	teoremas sobre linealizaciones . . . . .	17
A.5	funciones generalizadas . . . . .	19

# 1 ejercicios

Para preparar para el examen final sería bien repasar sobre las tareas que teníamos durante el semestre. También ponemos aquí un poco más problemas (principalmente sobre las temas más recientes):

1. Describe las curvas integrales (soluciones) de la siguiente e.d.o. sobre el plano:

$$-(\gamma x + \delta y)dx + (\alpha x + \beta y)dy = 0$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  son unos parámetros (no todos cero).

2. Consideramos una generalización de factor integrante (para e.d.o. lineal 1'er orden) al e.d.o. lineal 2'da orden. Decimos que

$$(*) \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

admite  $\mu(x)$  como factor integrante cuando en multiplicando (\*) por  $\mu(x)$  la e.d.o. (\*) tome la forma:

$$(**) \quad \frac{d}{dx} (A(x)y' + B(x)y) = 0$$

para algunas funciones  $A(x), B(x)$ .

- (a) Demuestra que  $\mu(x)$  es factor integrante para (\*) cuando satisface

$$(a\mu)'' - (b\mu)' + c\mu = 0$$

(y, además en (\*\*)) tenemos:  $A = a\mu$ ,  $B = b\mu - (a\mu)'$ .

- (b) Usar la técnica de factor integrante para encontrar la solución general de:

$$x \cos x y'' - 2x \sin x y' - x \cos x y = 0$$

3. Resuelve las siguientes e.d.o. en dos maneras: usando variación de parámetros y también usando la transformada de Laplace:

- (a)  $y'' + 3y' + 2y = 2te^{-t}$ , con condiciones iniciales  $y(1) = y'(1) = 0$ .

- (b)  $y^{(4)} - 2y'' + y = 12te^t$ , con condiciones iniciales  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 2$ ,  $y'''(0) = 3$ .

4. Considere la siguiente e.d.o. que depende por parámetros  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$y'' + 2by' + ay = f(t).$$

y dar condiciones sobre  $f(t)$  y los parámetros  $a, b \in \mathbb{R}$  para que:

- (a) existe única solución con  $y(0) = y(1) = 0$ ,
- (b) existe infinitas soluciones con  $y(0) = y(1) = 0$ .

5. Usa la transformada de Laplace para determinar soluciones  $f(t)$  definido para  $t \geq 0$  a las siguientes ecuaciones integral (cuando existen):

(a)  $t^2 = \int_0^t \sin(t-u)f(u) du,$

(b)  $f(t) = a \cos t + b \int_0^t \sin(t-u) f(u) du,$

(c)  $f(t) = a \cos t + b \int_0^t \cos(t-u) f'(u) du.$

Donde en las ultimas dos  $a, b \in \mathbb{R}$  son parametros (y  $a \neq 0$ ).

6. Demuestra que:

$$(\mathcal{L} \sinh bt)(s) = \frac{b}{s^2 - b^2}, \quad (s > |b|)$$

en dos maneras. Primer: directo de la definicion (11) de la transformada de Laplace y haciendo apropiada integraciones por partes. Segunda: usando que  $(\mathcal{L} e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$  (recuerda:  $\sinh bt = \frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2}$ ).

7. Demuestra que las siguientes funciones no tienen un transformada de Laplace (es decir la integral de la definicion (11) diverge para cada  $s \in \mathbb{R}$ ):

(a)  $f(t) = e^{t^2}, \quad t \geq 0,$  y  $f(t) = 0$  para  $t < 0$

(b)  $f(t) = 1/t, \quad t > 0,$  y  $f(t) = 0$  para  $t \leq 0$ .

Comparar con la resulta de proposicion 1 abajo.

8. Para  $f(t) = \sin e^{t^2}$  verifica que  $f$  es de orden de crecimiento no más que exponencial mientras  $t \rightarrow \infty$  y su transformada de Laplace  $(\mathcal{L}f)(s)$  esta bien definida para todos  $s > 0$ . Verifica que tambien es la transformada de Laplace de  $f'(t) = 2te^{t^2} \cos e^{t^2}$  bien definida para todos  $s > 0$ .

*Comentario:*  $f'(t) \notin O(e^{at})$  para cualquier  $a \in \mathbb{R}$ , pero aun su transformada de Laplace existe. Entonces nuestra descripcion en prop. 1 no es optimal (hay mas funciones en el dominio de  $\mathcal{L}$  que los que satisfacen las condiciones de prop. 1).

9. Sea  $t \mapsto f(t)$  con  $f(t) = 0, t < 0$  y  $f(t)$  continuo para  $t > 0$  y de orden de crecimiento no más que exponencial mientras  $t \rightarrow \infty$ . Demuestra que:

$$(\mathcal{L}f)'(s) = -(\mathcal{L}\{tf(t)\})(s)$$

para todos  $s$  suficientemente grande.

10. Demuestra que no existe ningun funcion  $t \mapsto f(t)$  que es continuo para  $t > 0$  y de orden de crecimiento no más que exponencial mientras  $t \rightarrow \infty$  tal que  $(\mathcal{L}f)(s) = 1$  para todos  $s > a$  suficientemente grande.

11. Demuestra que no existe soluciones  $t \mapsto f(t)$  continuos sobre  $t \geq 0$  al siguiente ecuación integral:

$$t = \int_0^t \sin(t-u)f(u) du.$$

*Comentario:* Considere diferenciando la ecuacion integral dos veces. Como relacione este resultado con el ejercicio anterior?

12. Considere la siguiente ecuación funcional:

$$y(t) - y(t-1) = f(t)$$

donde  $f(t)$  para  $t \geq 0$  y  $y(t)$  para  $t \in [-1, 0)$  estan dados y buscamos  $y(t)$  para  $t \geq 0$ .

- (a) Pon  $g(t) = \begin{cases} y(t-1) & 0 \leq t < 1, \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$  y verifica que la ecuación funcional arriba se escribe con la función de Heaviside como:

$$y(t) - H(t-1)y(t-1) = f(t) + g(t)$$

para  $t \geq 0$  (donde, por asuncion,  $f(t)$  y  $g(t)$  para  $t \geq 0$  son dados).

- (b) Usa la transformada de Laplace para establecer que

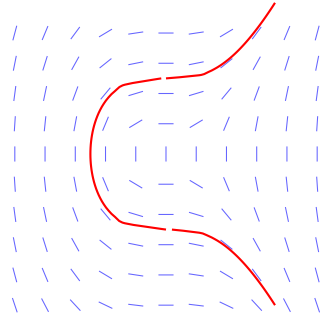
$$y(t) = g(t - [t]) + \sum_{k=0}^{[t]} f(t-k)$$

donde  $[t] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq t\}$ .

*Comentario:* Considera la serie geometrica  $\frac{1}{1-e^{-s}} = 1 + e^{-s} + e^{-2s} + \dots$

## 2 una e.d.o. 1'er orden

Tenemos unas técnicas para buscar formulas explicitas (hasta quadraturas  $\equiv$  calcular anti-derivadas) de soluciones a una e.d.o. 1'er orden. Una e.d.o. 1'er orden es geometricamente un campo de lineas sobre el plano y las soluciones (o curvas integral) son las curvas planar tangente a tal campo de lineas:



En formulas describimos un campo de lineas sobre el plano por una expresión como:

$$a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

significando que en el punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tenemos la linea con normal dirigido por el vector  $(a(x, y), b(x, y))$  (y pasando por el punto  $(x, y)$ ). La linea esta bien definida en los puntos *regular* donde  $a(x, y) \neq 0$  ó  $b(x, y) \neq 0$ . Los puntos  $(x_*, y_*)$  donde  $a(x_*, y_*) = 0$  y  $b(x_*, y_*) = 0$  son puntos *singular* del campo (no hay una linea determinada en tales puntos).

Si no mencionamos al contrario generalmente asumimos que las coeficientes  $a(x, y), b(x, y)$  de (1) son funciones suaves (o a veces analíticas) sobre el plano y que sus puntos singular (si existen) son aislados.

**Remark.** Las dos expresiones:  $adx+bdy = 0$ , ó,  $\mu adx+\mu bdy = 0$  para cualquier  $\mu(x, y) \neq 0$  presentan el mismo campo de lineas (el factor  $\mu$  no efecta las direcciones normal de las lineas). En los puntos donde  $b(x, y) \neq 0$  el campo de lineas (1) no es vertical y podemos describirlo por los pendientes (de soluciones  $x \mapsto (x, y(x))$  gráficar sobre eje- $x$ )

$$p(x, y) = -\frac{a(x, y)}{b(x, y)} = dy/dx = y'.$$

Igual cuando  $a(x, y) \neq 0$  el campo de lineas (1) no es horizontal y podemos describirlo por los pendientes (de soluciones  $y \mapsto (x(y), y)$  gráficar sobre eje- $y$ )

$$q(x, y) = -\frac{b(x, y)}{a(x, y)} = dx/dy = x'.$$

## 2.1 e.d.o. seperables, lineales

Para e.d.o. en las siguientes formas tenemos formulas explicitas para sus soluciones hasta cuadraturas (calcular anti-derivadas):

- ECUACIONES SEPERABLES: para un campo de lineas (1) en la forma

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

tenemos sus soluciones como curvas implicitas (conjuntos niveles) hasta cuadraturas:  $\int f(x) dx + \int g(y) dy = cst.$

- ECUACIONES LINEAL (1'ER ORDEN): para un campo de lineas (1) en la forma:

$$dy/dx = a(x)y + b(x)$$

podemos resolver en multiplicando por un 'factor integrante'  $\mu(x)$  tal que  $\mu' = -a(x)\mu$  y nuestros soluciones como las curvas grafical  $(x, y(x))$  determinado hasta cuadraturas:

$$\mu(x)y = \int \mu(x)b(x) dx + cst., \quad (\mu(x) = e^{-\int a(x)dx}).$$

## 2.2 factor integrante, cambio de variables

Para campo de lineas general (1) no existe general proceso para expresar sus soluciones hasta cuadraturas. De todos modos tenemos aun los siguientes métodos general para probar:

- FACTOR INTEGRANTE: los conjuntos nivel de un funcion  $\varphi(x, y) = cst.$  serian soluciones implicitas del e.d.o. (1) cuando  $\varphi_x : \varphi_y = a : b$  es decir que buscamos funciones  $\mu(x, y) \neq 0$ ,  $\varphi(x, y)$  tal que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu a, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu b$$

(tal función  $\mu$  llamamos un factor integrante). Debido a que las parciales de  $\varphi$  comutan, buscamos tal  $\mu(x, y)$  que satisface:

$$\frac{\partial(\mu a)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu b)}{\partial x}. \tag{2}$$

- CAMBIO DE VARIABLE (SUBSTITUCIÓN): dado algún e.d.o. (1) podemos buscar cambio de variables  $x = F(X, Y)$ ,  $y = G(X, Y)$  y esperar que la e.d.o. transformada:

$$(aF_X + bG_X)dX + (aF_Y + bG_Y)dY = 0$$

sería 'más sencillo' (es decir un tipo que podemos resolver).

**Remark.** En general la e.d.p. (2) para un factor integrante es igual de difícil encontrar alguna solución como la e.d.o. original (1). En caso que tenemos suerte encontrar alguna solución  $\mu(x, y) \neq 0$  de (2) tenemos (lemma de Poincaré) soluciones al e.d.o. original (1) hasta cuadraturas como conjuntos nivel de:

$$\varphi(x, y) = \int_{x_0}^x A(u, y_0) du + \int_{y_0}^y B(x, v) dv = \int_{x_0}^x A(u, y) du + \int_{y_0}^y B(x_0, v) dv$$

donde  $A = \mu a$ ,  $B = \mu b$  y fijamos unos  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ . Similarmente, con cambios de variables no hay método general para encontrar una explícita cambio para que la e.d.o. transformada va a salir ‘más sencillo’.

**Remark.** Un otro tipo de substitucion por ciertos e.d.o. 2’da orden es cuando substituir  $p = dy/dx$ , convierte tal e.d.o. de 2’da orden a un e.d.o. de 1’er orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \rightarrow \frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g\left(y, \frac{dy}{dx}\right) \rightarrow p \frac{dp}{dy} = g(y, p),$$

que son ejemplos particular de una reducción de orden.

**Remark.** ECUACIONES IMPLICITAS son de la forma:

$$F(x, y, p) = 0, \quad \left(p = \frac{dy}{dx}\right).$$

Notamos que si logramos poner tal ecuacion implicita en la forma  $y = f(x, p)$  (‘resolver’ para  $y$ ) entonces diferenciando con respecto al  $x$  tenemos un e.d.o. 1’er orden:  $p = f_x + f_p \frac{dp}{dx}$ . Cualquier solución  $p(x)$  a tal e.d.o. 1’er orden determina una solución  $y(x) = f(x, p(x))$  al e.d.o. implicita original.

Similar si logramos poner tal ecuacion implicita en la forma  $x = g(y, p)$ , diferenciamos con respecto al  $y$  para tener e.d.o. 1’er orden  $1 = (g_y + g_p \frac{dp}{dy})p$ . Cualquier solución a tal e.d.o. 1’er orden  $p(y)$  determina solución  $x(y) = g(y, p(y))$  al e.d.o. implicita original.

No olvidamos que cuando estamos interesado en analizar soluciones particular (con ciertos condiciones iniciales, es decir la curva integral conexo que pasa por un cierto punto dado) tenemos que prestar atención a los constantes de integración y dominio en que tal solución esta bien definido como curva conexo (y cuando relevante su dominio como curva gráfica conexo).

Para no sentir tan pesimista sobre la situación que en general no es posible escribir formulas explícitas para una solución de una e.d.o. hasta cuadraturas, mencionamos que en general si es posible determina explícitamente las coeficientes en un serie de poder para soluciones hasta cualquier orden (§A.3). Cada discusión sobre la posibilidad de ‘resolver’ una ecuación debe comenzar con precisando sobre con cuales tipos de funciones uno intenta expresar tal solución.

### 3 sistemas e.d.o. lineal

Las e.d.o. 1'er orden (gráficoal sobre eje- $x$ ) comunmente dividimos en varias tipos:

- e.d.o. 1'er orden *implicita*:  $F(x, y, y') = 0$
- e.d.o. 1'er orden en forma local normal:  $y' = p(x, y)$
- e.d.o. 1'er orden *lineal*:  $y' = a(x)y + b(x)$ .

Pasamos de *una sola* e.d.o. 1'er orden (campo lineal en el plano con forma local normal:  $y' = p(x, y)$ ) a *sistemas* de e.d.o. 1'er orden (campo lineal en espacios de dimensiones superior) con forma local normal:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n) \quad (3)$$

(que corresponde al campo de lineas 'no-vertical' sobre  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  dirigido por los vectores  $(1, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}))$  tangente a las gráficas  $t \mapsto (t, \mathbf{x}(t))$  de soluciones a (3)).

En general es difícil encontrar soluciones explicitas de sistemas como (3). Encontrar soluciones de equilibrio:  $\mathbf{x}(t) \equiv cst.$  es una tarea algebraical: resolver para los  $\mathbf{x}_o$  tal que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_o) = 0$ , y entonces tipicamente algo menos difícil. En caso que existe tales soluciones de equilibrio, o que tenemos la suerte de encontrar algún solución particular de (3) las teoremas sobre linealización (§A.4) implican que tambien obtendremos una descripción que aproxima bien la sistema (3) 'cerca' de tales soluciones particular tan pronto que podemos entender los sistemas de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \quad (\textit{autonoma}) \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} \quad (\textit{no - autonoma}) \quad (5)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $A, A(t): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son unos transformaciones *lineal*. Entonces los e.d.o.'s del tipo (4), (5) tienen un papel central y enfocaremos en ellos para la mayoría del curso. Tambien resulta que e.d.o.'s de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad (\textit{no - homogenea}) \quad (6)$$

donde  $t \mapsto \mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ , el parte no homogenea esta dado, serian util entender (en particular para métodos perturbativos).

**Remark.** *En considerando sistemas de e.d.o. tambien podemos incluir e.d.o.'s de mas alto orden en cambiar derivadas por variables. A saber comunmente dividimos en los tipos:*

- e.d.o. de orden  $n$  implicita:  $F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ ,
- e.d.o. de orden  $n$  en forma estandar:  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ,
- e.d.o. de orden  $n$  lineal:  $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$

y podemos poner las últimas dos en la forma de eq. (3) ó eqs. (4)–(6) en tomar  $\mathbf{x} = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$  y  $t = x$ .

### 3.1 sistemas e.d.o. lineal autonoma

Para e.d.o. lineal autonoma (4) tenemos método general para encontrar las soluciones explicitas (en terminos de funciones elementales) por medios de analizar los valores propios/espacios propios de la transformacion lineal  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es decir buscamos un base para poner  $A$  en forma normal de Jordan. Caso por caso tenemos:

- valor propio real  $\lambda \in \mathbb{R}$ , con vector propio real  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ :  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  genera un solución  $e^{\lambda t}\mathbf{v}$ ,
- valor propio compleja  $\lambda_{\pm} = a \pm ib \in \mathbb{C}$  (con  $b \neq 0$ ) y vector propio  $\mathbf{V}_{\pm} \in \mathbb{C}^n$ :  $A\mathbf{V}_{\pm} = \lambda_{\pm}\mathbf{V}_{\pm}$ , genera soluciones  $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}^n$  por partes real/imaginaria de:

$$e^{\lambda+t}\mathbf{V}_{+} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \overbrace{e^{at}(\cos bt \mathbf{u} - \sin bt \mathbf{v})}^{\mathbf{x}_1(t)} + i \overbrace{e^{at}(\sin bt \mathbf{u} + \cos bt \mathbf{v})}^{\mathbf{x}_2(t)}$$

donde escribimos  $\mathbf{V}_{\pm} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$  en partes real/imaginaria con  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ .

- valor propio  $\lambda$  repetida, dependiendo del multiplicidad, determina vectores propios generalizados:

$$(A - \lambda Id)\mathbf{v}_1 = 0, \quad (A - \lambda Id)^2\mathbf{v}_2 = 0, \quad (A - \lambda Id)^3\mathbf{v}_3 = 0, \dots$$

que generan soluciones de la forma  $e^{\lambda t}\mathbf{v}_1, e^{\lambda t}(t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), e^{\lambda t}(t^2\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3), \dots$  (eligiendo:  $A\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 = \lambda\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_3 = \lambda\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2, \dots$ ).

**Remark.** Un caso de principal interes de sistemas es el caso de una sola e.d.o. de orden superior  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ . En particular traduciendo los resultados de algebra lineal a una e.d.o. lineal orden  $n$  con coeficientes constantes:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (a_j \in \mathbb{R}) \quad (7)$$

obtenemos las soluciones más directo en recordar que serian de la forma  $y = e^{\lambda x}$  donde  $\lambda$  es algún raíz del polinomio caracteristico, y substituyendo conduce a:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

- un valor propio real  $\lambda \in \mathbb{R}$  conduce al solucion particular:  $e^{\lambda x}$ .
- un valor propio compleja  $\lambda = a \pm ib \in \mathbb{C}$  (con  $b \neq 0$ ) conduce a dos soluciones particular:  $e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx$ .
- un valor propio real,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , repetida de multiplicidad  $k + 1$  conduce al soluciones particular:  $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^k e^{\lambda x}$
- un valor compleja,  $\lambda = a \pm ib \in \mathbb{C}$ , repetida de multiplicidad  $k+1$  conduce al soluciones:  $e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx, xe^{ax} \cos bx, xe^{ax} \sin bx, \dots, x^k e^{ax} \cos bx, x^k e^{ax} \sin bx$ .

### 3.2 sistemas e.d.o. lineal no-autonoma

Para e.d.o. lineal no-autonoma (5) (donde las transformaciones lineal  $A(t)$  depende de manera no-trivial por el variable independiente  $t$ ) tipicamente *no* hay manera encontrar soluciones explicitas hasta quadraturas.

Primer debemos poder reconocer las siguientes formas/situaciones excepcional que pueden conducir a soluciones explicitas (para sistemas lineal representado por algun sola e.d.o. lineal de orden  $n$ ):

- FORMA CAUCHY-EULER: un sistema lineal en la forma particular:

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \quad (C.E.)$$

siempre convierte a algún e.d.o. lineal autonoma (coeficientes constantes) despues la substitución  $x = e^t$ . La manera más eficiente encontrar soluciones a un e.d.o. tipo C.E. no es generalmente hacer tal cambio de variable, sino, simplemente substituir  $y = x^\lambda = e^{\lambda t}$  para obtener el polinomio caracteristico apropiado.

- REDUCCIÓN DE ORDEN: en caso que sabemos una solución particular  $y_p(x) \neq 0$  de algún e.d.o. lineal homogenea:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (8)$$

la substitucion  $y(x) = u(x)y_p(x)$  siempre reduce (8) a algún e.d.o. lineal de orden  $n - 1$  para  $v = u'$ .

**Remark.** Recordando que una sola e.d.o. lineal 1'er orden siempre podemos resolver hasta quadraturas, despues de aplicar repetitivamente la reducción de orden llegamos a la resultado que si tenemos  $n - 1$  soluciones particular ( $y$  independientes) a una e.d.o. como (8) de orden  $n$ , entonces podemos determinar su solución general hasta quadraturas.

Aparte estas formas excepcional, queda la posibilidad de hacer algun fortunado cambio de variables, o, aplicar métodos de series. Para desarrollar un lenguaje para enfocar nuestros esfuerzos notamos: dado  $t > 0$  la transformación (*flujo*)  $\Phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que envia una condicion inicial  $\mathbf{x}_o$  al  $\mathbf{x}(t) = \Phi_t(\mathbf{x}_o)$  donde  $\mathbf{x}(t)$  resuelve (5) con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o$ , sería una transformacion lineal. Entonces entender la sistema (5) es equivalente a entender las transformaciones lineales  $\Phi_t$ . En esta dirección tenemos la resultado general:

- Para una sistema de la forma (5), sea  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$  algunos soluciones a tal sistema. Entonces su *Wronskiano*:  $W(t) = \det(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t))$  tiene  $W(t) = c \det \Phi_t$  algún constante  $c$  y ademas satisface el e.d.o.:

$$dW/dt = \text{tr}(A(t)) W$$

Notamos: entonces siempre podemos encontrar, hasta quadratura,  $W(t)$  (aun si ni conocemos ningun solución particular  $\mathbf{x}(t)$ ).

- Con respeto al e.d.o. lineal y cambios de variables es comun considerar el efecto/normalizaciones bajo transformaciones de la forma particular:  $x = F(X)$ , ó,  $y = \mu(x)Y$ .

### 3.3 sistemas e.d.o. lineal no homogénea (variación de parámetros)

El método de variación de parámetros es un general método ‘perturbativo’ que aplica al siguiente situación general: tenemos un sistema en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}_o(t, \mathbf{x}) + \mathbf{f}_{per}(t, \mathbf{x}), \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \quad (9)$$

donde *conocemos* la solución general de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_o(t, \mathbf{x})$  (sistema ‘original’ o ‘no-perturbado’). ¿Como podemos describir soluciones al sistema perturbado (9)?

El método de variación de parámetros (o variación de constantes) propone buscar soluciones de (9) de la forma:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, \mathbf{c}(t))$$

para  $t \mapsto \Phi(t, \mathbf{c}) \in \mathbb{R}^n$  la solución general del sistema no-perturbado  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_o(t, \mathbf{x})$  dependiendo por  $n$ -constantes  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  (p.ej. condiciones iniciales). Por asunción, conocemos  $\Phi(t, \mathbf{c})$  explícitamente. De regla cadena, la condición sobre  $\mathbf{c}(t)$  para tener solución al sistema perturbado es otra e.d.o.:

$$\dot{\mathbf{c}} = d\mathbf{c}/dt = \mathbf{g}(t, \mathbf{c}) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{c}} \right)^{-1} \mathbf{f}_{per}(t, \Phi(t, \mathbf{c})) \quad (10)$$

**Remark.** *Este método convierte la pregunta de buscar soluciones de (9) a la pregunta de buscar soluciones de (10). Generalmente la e.d.o. (10) es igual complejo que la original (9), y con método de variación de constantes solo traducimos una pregunta difícil al otra pregunta difícil. Aun, el método es útil cuando queremos pensar en ‘manera de perturbaciones’, ya que (10) describe directamente los efectos con que los terminos  $\mathbf{f}_{per}(t, \mathbf{x})$  ‘deforman’ las soluciones del sistema no-perturbado. Cualquier información sobre sus soluciones  $\mathbf{c}(t)$  (p.ej. series de poder) nos permite entender tales deformaciones.*

Situación mas relevante en que método de variación de parámetros si esta exitoso es con sistemas lineales no-homogéneas (6) a lo cual conocemos solución general de su parte homogénea (5) (p.ej. cuando el parte homogénea es autónomo). El método en esta situación traduce al siguientes etapas:

- SISTEMA LINEAL NO-HOMOGENEA: suponer que conocemos un base de soluciones  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$  de algún e.d.o. lineal homogénea (5) para que su solución general esta de la forma

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t)$$

con  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  constantes. Entonces la solución de una asociado e.d.o. lineal no-homogénea (6) esta dado por:  $\mathbf{x}(t) = c_1(t) \mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n(t) \mathbf{x}_n(t)$  donde  $c_j(t)$  satisfacen:

$$(*) \quad \frac{dc_1}{dt} \mathbf{x}_1(t) + \dots + \frac{dc_n}{dt} \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{b}(t).$$

Notar: con  $\mathbf{x}_j(t), \mathbf{b}(t)$  dados, siempre podemos encontrar soluciones  $c_j(t)$  del sistema (\*) hasta cuadraturas: que  $\mathbf{x}_j(t)$  son un base, tenemos  $\mathbf{b}(t) = b_1(t) \mathbf{x}_1(t) + \dots + b_n(t) \mathbf{x}_n(t)$  y entonces  $c_j(t) = \int b_j(t) dt + cst$ .

## 4 transformada de Laplace

Finalmente tomamos una perspectiva ‘operador’ sobre e.d.o. en considerar (3) como una transformación cuyo dominio y co-dominio son ciertos conjuntos:

$$\mathfrak{D} : \mathcal{F} \dashrightarrow \mathcal{F}, \quad \mathbf{x}(t) \mapsto \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = (\mathfrak{D}\mathbf{x})(t)$$

donde  $\mathcal{F}$  es un conjunto de funciones  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  apropiados (y la flecha roto: ‘ $\dashrightarrow$ ’ significa que no estamos preocupados sobre especificar el dominio/codominio de  $\mathfrak{D}$ ). Describir soluciones del e.d.o (3) se traduce a describir el conjunto nivel  $\mathfrak{D}^{-1}(0)$ . Desde esta perspectiva general, la transformada de Laplace tiene la misma motivación como cambios de variables, pero ahora estamos haciendo algún ‘cambio de variables’ en un espacio de funciones apropiado  $\mathcal{F}$ . Más precisamente podemos considerar alguna transformación (invertible):

$$\Phi : \mathcal{F} \dashrightarrow \mathcal{F}$$

que convierte el e.d.o. original (operador  $\mathbf{x} \mapsto \mathfrak{D}\mathbf{x}$ ) a algún otro operador  $\mathbf{X} \mapsto \overline{\mathfrak{D}}\mathbf{X}$  para  $\overline{\mathfrak{D}} = \Phi \circ \mathfrak{D} \circ \Phi^{-1} : \mathcal{F} \dashrightarrow \mathcal{F}$ . Igual como cuando probamos cambios de variables, esperamos que el nuevo operador  $\overline{\mathfrak{D}}$  es ‘más fácil’ describir sus conjuntos niveles  $\overline{\mathfrak{D}}^{-1}(0)$  que el original  $\mathfrak{D}^{-1}(0)$ .

Para fijar las ideas nuestro enfoque sería en la siguiente *transformada de Laplace (unilateral)*:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{F} \dashrightarrow \mathcal{F}, \quad f \mapsto \mathcal{L}f \\ (\mathcal{L}f)(s) = F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \end{aligned} \quad (11)$$

cuyo dominio y codominio son ciertos conjuntos de funciones  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , a saber los  $t \mapsto f(t)$  tal que la integral en (11) converge para algunos  $s \in \mathbb{R}$ . Y estamos interesados en sus aplicaciones a e.d.o. lineal de orden  $n$ , como operador:

$$\mathfrak{D} = \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$$

(es decir  $\mathfrak{D}$  envía una función  $\mathbb{R} \ni t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$  ( $n$ -veces diferenciable) al  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y$ ). La transformada de Laplace sería útil para esta situación con *coeficientes constantes* debido a que convertiría tales e.d.o. lineal autónoma (y no-homogénea)  $\mathfrak{D}y = f$  a ecuaciones  $\overline{\mathfrak{D}}Y = F$  que son *algebraicas*. Para detalles calculamos una colección de transformadas (§4.1) y tenemos las siguientes propiedades:

**Proposition 1.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrable (sobre cualquier intervalo compacto) y de crecimiento no más que orden exponencial mientras  $t \rightarrow \infty$ :*

$$|f(t)| \leq Ce^{at}, \quad \forall t \geq T$$

para algunos constantes  $C, a, T$  (también denotamos  $f = O(e^{at})$ ). Entonces  $(\mathcal{L}f)(s)$  está definido, al menos, para todos  $s > a$ .

**Proposition 2.** Sea  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

- $f = 0, g = 0$  para todos  $t < 0$ , y  $f, g$  son continuos sobre  $t \geq 0$ , y de crecimiento no más que orden exponencial mientras  $t \rightarrow \infty$ .

Entonces:  $(\mathcal{L}f)(s) = (\mathcal{L}g)(s), \forall s > s_o$  suficientemente grande  $\implies f = g$ .

**Remark.** Si no mencionamos al contrario, mientras estamos trabajando con la transformado de Laplace, consideramos funciones como en las ultimas proposiciones 1,2. A saber  $t \mapsto f(t)$  con  $f = O(e^{at})$  mientras  $t \rightarrow \infty$ , tambien con  $f(t) = 0, t < 0$ , y p.ej. continuos o suave por partes. En particular  $\mathcal{L}$  es invertible sobre las funciones como en prop. 2. Sigue por ejemplo de la linealidad de  $\mathcal{L}$  que tenemos tambien linealidad de su inverso  $\mathcal{L}^{-1}$  (definido sobre el imagen bajo  $\mathcal{L}$  de las funciones como en prop. 2).

#### 4.1 unas transformaciones de Laplace (una tablita)

$f = \mathcal{L}^{-1}(F)$	$F = \mathcal{L}f$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$
$H(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$

**Remark.** En los ultimos dos filas tenemos la convolucion:  $(f * g)(t) := \int_0^t f(u)g(t-u)du$  de los dos funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(t) = 0, g(t) = 0$  todos  $t < 0$ , y la

función de Heaviside (o escalera unitaria):  $H(t) := \begin{cases} 1 & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$

Por ejemplo aplicando transformada de Laplace a un e.d.o. lineal autonoma y no-homogenea:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f$$

obtenemos solución particular en forma de una convolucion:

$$y_p(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

donde  $(\mathcal{L}g)(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$ . Calculamos la inversion,  $g(t)$ , usando decomposicion en fracciones parciales (y las entradas relevantes de la tabla).

## A temas extra

Aquí ponemos unas extras temas relevantes (que no necesariamente nos hemos centrado, pero que siguen importantes).

### A.1 simetrías y integrabilidad

La noción que un ecuación es ‘resoluble explícitamente’ depende de la clase de funciones con que deseamos representar la solución. Por ejemplo para una e.d.o.  $y' = p(x, y)$  en el plano con coordenadas  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tenemos:

- funciones elementales en los variables  $x, y$ : los polinomios, trigonométricas, exponenciales igual que todos las funciones obtenida por un numero finito de sus inversos/composiciones/operaciones algebraicos.
- funciones hasta cuadraturas de los que definan el e.d.o.: anadimos a las funciones elementales la funcion  $p(x, y)$  igual que todos las funciones obtenida por un numero finito de sus inversos/composiciones/operaciones algebraicos/derivadas/anti-derivadas.

el primer clase es mas estricta (la mayoría de e.d.o. no admeten soluciones que son expresible en funciones elementales, p.ej.  $dy/dx = e^{-x^2}$ ) y generalmente la segunda clase de ‘soluciones hasta cuadraturas’ es que uno significa cuando hablamos de soluciones explicitas a algún e.d.o.

Preguntas como: ¿dado un e.d.o.  $y' = p(x, y)$  como puedo decidir si existe un solucion explicita en funciones elementales? ¿en funciones hasta cuadraturas? comenzan una gran tema de ‘integrabilidad’ (analogos de la teoría de Galois para e.d.o.). Aquí solo mencionamos un resultado sobre esta relacion entre ‘integrabilidad’ (cuando podemos escribir soluciones explicitas hasta cuadraturas) y encontrando ciertas simetrías de una e.d.o. 1’er orden:

**Definition 1.** Una simetría de una e.d.o.  $dy/dx = p(x, y)$  es una transformación del plano  $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que envia soluciones de la e.d.o. a soluciones:  $(x, y(x))$  solución  $\implies \sigma(x, y(x))$  otra solución.

Dicimos que tenemos una 1-parametro familia de simetrías de la e.d.o. cuando para cada  $\epsilon \in \mathbb{R}$  tenemos algún simetría  $\sigma_\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de tal e.d.o. con  $\sigma_0 = id$  y que no sean triviales:  $\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}\sigma_\epsilon(x, y) \neq 0$  algún  $(x, y)$ .

**Theorem 1.** Dado una e.d.o.  $dy/dx = p(x, y)$ , a lo cual conocemos explicitamente una 1-parametro familia,  $\sigma_\epsilon$ , de simetrías de tal e.d.o., entonces tambien conocemos las soluciones de la e.d.o. hasta cuadraturas. A saber las soluciones son las curvas implicitas (conjuntos niveles) de:

$$\varphi(x, y) = \int_{y_o}^y \frac{dv}{\eta(x_o, v) - p(x_o, v)\xi(x_o, v)} - \int_{x_o}^x \frac{p(u, y)du}{\eta(u, y) - p(u, y)\xi(u, y)}$$

donde  $(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}\sigma_\epsilon(x, y)$  estan (por asunción) conocido explicitamente y  $x_o, y_o \in \mathbb{R}$  algunos constantes.

**Remark.** Otra manera expresar la conclusion del teorema es que dado una 1-parametro familia,  $\sigma_\epsilon$ , de simetrías al e.d.o.  $y' = p(x, y)$  con  $(\xi, \eta) = \frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}\sigma_\epsilon$ , entonces tenemos un factor integrante explicita  $\mu = \frac{1}{\eta - p\xi}$  para  $\frac{dy - p dx}{\eta - p\xi} = d\varphi$ , y entonces las soluciones explicitas hasta cuadraturas.

Para e.d.o.'s de orden más alta la estructura entre simetrías y integrabilidad conenza ser mas intrincada (es decir interesante)<sup>1</sup>.

## A.2 unas teoremas de comparición

Encontrar soluciones explicitas (hasta cuadraturas) a un e.d.o. dado es en general dificil (sino imposible). Un herramiento valorable para entender soluciones de e.d.o. sin la necesidad de resolverlos explicitamente estan 'teoremas de comparicion'. No hay *un* teorema de comparicion, más bien hay un variedad de tales teoremas que sientan bajo una tema comun. A saber la idea general es decir cuales relaciones entre unos e.d.o.'s nos permite concluir relaciones entre sus soluciones. Unos ejemplos:

**Theorem 2.** Considere dos campos de lineas no vertical sobre el plano con pendientes dado por funciones continuos  $p, P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$p(x, y) \leq P(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces para  $y = s(x), y = S(x)$  soluciones a tales e.d.o. ( $s'(x) = p(x, s(x)), y, S'(x) = P(x, S(x))$ ) tenemos:

1. si  $s(x_o) \leq S(x_o)$  entonces  $s(x) \leq S(x)$  para todos  $x \geq x_o$  en que las soluciones son definidos,
2. si  $s(x_o) \geq S(x_o)$  entonces  $s(x) \geq S(x)$  para todos  $x \leq x_o$  en que las soluciones son definidos.

**Theorem 3** (Sturm). Considere dos e.d.o. 2' da orden lineal de la forma:

$$(a(x)y')' + b(x)y = 0, \quad (a(x)y')' + B(x)y = 0.$$

Suponer que  $y = s(x)$  es una solucion de 1'er e.d.o. ( $(as')' + bs = 0$ ) con:

$$y = s(x_o) = 0, \quad y = s(x_1) = 0, \quad y = s(x) \neq 0, \quad \forall x \in (x_o, x_1).$$

Entonces cuando  $b(x) \leq B(x), \forall x \in [x_o, x_1]$ , cualquier solucion  $y = S(x)$  de 2' da e.d.o. ( $(aS')' + BS = 0$ ) tiene

$$y = S(\xi) = 0, \quad \text{algún } \xi \in (x_o, x_1)$$

aparte del caso  $b \equiv B, y, S(x) = cs(x)$ .

<sup>1</sup>Para una introducion ver p.ej. H. Stephani. *Differential equations: their solution using symmetries*. Cambridge University Press, (1989).

**Remark.** Podemos demostrar teorema 3 en aplicando teorema 2 al e.d.o. 1'er orden (e.d.o. tipo Ricatti) que gobierna la evolución de las pendientes  $y'(x)/y(x)$  de soluciones a las e.d.o. 2' da orden en teorema 3.

**Remark.** Aplicado en manera apropiada tales teoremas de comparacion haz posible sacar gran cantidad de información sobre soluciones de algun e.d.o. 'complicado' sin la necesidad de encontrar sus soluciones explicitas. A saber cuando uno puede encontrar un e.d.o. 'sencilla' (cuyos soluciones entendemos) para comparar/controlar el compartamiento de las soluciones al e.d.o. 'complicado'.

### A.3 teoremas de existencia/unicidad

La 'teorema fundamental sobre e.d.o.' refiere generalmente a algo sobre existencia y unicidad. De menudo usamos este teorema sin pensar (cuando encontramos un solucion con dados condiciones iniciales dejamos de intentar buscar mas). Tambien como hay varias teoremas de comparacion hay varias teoremas de existencia/unicidad:

**Theorem 4** (existencia/unicidad: Cauchy). *Considera una sistema e.d.o.  $dx/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  donde*

$$\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

*es analitica alrededor algún punto  $(t_o, \mathbf{x}_o) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Entonces, existe única solucion:  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$  del sistema con valor inicial  $\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x}_o$  definido para  $t$  en algun intervalo que contiene  $t_o$ , y ademas analitica por  $t_o$ .*

**Remark.** *Hay bastantes extensiones<sup>2</sup> de esta resultado (como dependencia analitica por condiciones iniciales, parámetros, o alrededor una solucion definido por intervalo finito, etc.). La demostración tipico usa la tecnica de 'mayorantes de Cauchy'. Notamos tambien que la resultado esta util en practica ya que la unica obstruccion a conocer las coeficientes de tales series de cualquier orden es el tiempo computacional: dado suficiente tiempo es posible calcular por mano estas coeficientes.*

**Theorem 5** (existencia/unicidad: Picard-Lindelöf). *Considera una sistema e.d.o.  $dx/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  donde*

$$\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

*es Lipschitz alrededor algún punto  $(t_o, \mathbf{x}_o) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Entonces, existe única solucion:  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$  del sistema con valor inicial  $\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x}_o$  definido para  $t$  en algun intervalo que contiene  $t_o$ .*

**Remark.** *Una función,  $f$ , es Lipschitz alrededor el punto  $p_o$  cuando existe barrio  $U$  de  $p_o$  y constante  $L > 0$  tal que  $|f(p) - f(q)| \leq L|p - q|$  para todos  $p, q \in U$ . Por ejemplo cada funcion de clase  $C^1$  es localmente Lipschitz (es decir Lipschitz en algún parrio alrededor cualquier punto).*

<sup>2</sup>Ver p.ej. T. I, ch. II, §27 de H. Poincare. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, T. I, II, III. Paris, Gauthier-Villars, 1893, 1892, 1899.

**Remark.** La demostración de la teorema 5 es interesante conceptualmente ya que reformulamos buscando soluciones del e.d.o. como buscando puntos fijos de un operador apropiado (ecuación integral), y verificamos que teorema de mapeos de contracción 6 aplica para concluir el resultado anunciado. Notamos también que esta demostración es constructiva, ya que construye una secuencia de funciones (definidas por sucesivas cuadraturas) que converge a la solución buscada.

**Theorem 6** (Mapeos contracción). Sea  $X$  un espacio métrica completa, y  $f : X \rightarrow X$  un mapeo de contracción:

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$$

para algún constante  $\lambda \in (0, 1)$  y para todos  $x, y \in X$ . Entonces existe única punto fijo,  $f(x_*) = x_*$ , de  $f$  en  $X$ .

#### A.4 teoremas sobre linealizaciones

Para sistemas de e.d.o. general (3) conocer unas soluciones es difícil. Teoremas de linealización nos dejan aprovechar de cuando logramos conocer algún solución para entender algo sobre soluciones cerca de tal solución.

**Definition 2.** Sea (\*)  $dx/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  algún sistema que admite solución de equilibrio:  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_* = \text{cst.}$ , es decir:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) \equiv 0.$$

Llamamos la linealización del sistema (\*) alrededor la solución equilibrio  $\mathbf{x}_*$  el sistema lineal autónoma:

$$d\xi/dt = A\xi, \quad (A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*}).$$

**Theorem 7.** Sea (\*)  $dx/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  algún sistema con  $\mathbf{f}$  de clase  $C^1$  y que admite algún solución de equilibrio:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) \equiv 0$ . Entonces para cualquier  $\epsilon > 0, T > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_* - \xi(t)| < \epsilon, \quad \forall |t| < T$$

para cualquier soluciones  $\mathbf{x}(t)$  de (\*) y  $\xi(t)$  de la linealización de (\*) alrededor  $\mathbf{x}_*$  cuyos condiciones iniciales satisfacen  $\mathbf{x}(0) = \xi(0) + \mathbf{x}_*$  y  $|\xi(0)| < \delta$ .

Similarmente tenemos la generalización:

**Definition 3.** Sea (\*)  $dx/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  con una solución particular  $t \mapsto \mathbf{x}_*(t)$ . Llamamos la linealización del sistema (\*) alrededor tal solución particular (o las ecuaciones variacional alrededor tal solución) el sistema lineal:

$$d\xi/dt = A(t)\xi, \quad (A(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*(t)}).$$

**Theorem 8.** Sea (\*)  $dx/dt = f(t, x)$  algún sistema con  $f$  de clase  $C^1$  y con  $t \mapsto x_*(t)$ , algún solución particular. Entonces para cualquier  $\epsilon > 0, T > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x(t) - x_*(t) - \xi(t)| < \epsilon, \quad \forall |t| < T$$

para cualquier soluciones  $x(t)$  de (\*) y  $\xi(t)$  de la linealización de (\*) alrededor  $x_*(t)$  cuyos condiciones iniciales satisfacen  $x(0) = \xi(0) + x_*(0)$  y  $|\xi(0)| < \delta$ .

**Remark.** La manera estandar para establecer las teoremas de linealización es usando la Lemma de Gronwall:

**Lemma 1** (Gronwall). Sea  $u, v, c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  con:

1.  $u, v$  son continuos sobre  $[0, T]$ ,
2.  $c$  es diferenciable sobre  $[0, T]$ ,
3.  $v(t) \leq c(t) + \int_0^t u(s)v(s) ds$

Entonces

$$v(t) \leq c(0)e^{\int_0^t u(s)ds} + \int_0^t c'(s)e^{\int_s^t u(\tau)d\tau} ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

Notar que las teoremas arriba solo aplican sobre escalas de tiempo finitas. Un situación cuando se puede quitar este hipótesis es:

**Theorem 9** (Grobman-Hartman). Sea (\*)  $dx/dt = f(x)$  algún sistema con  $f$  de clase  $C^1$  y que admite algún solución de equilibrio:  $f(x_*) \equiv 0$  donde la linealización,  $d\xi/dt = A\xi$ , del sistema alrededor  $x_*$  es hiperbolica: todos los valores propios de  $A$  tiene partes reales distintos de cero. Entonces

- existe barrios  $U$  de  $0 \in \mathbb{R}^n$  y  $V$  de  $x_* \in \mathbb{R}^n$  y una biyección:

$$h : U \rightarrow V$$

que es continuo, y con inverso  $h^{-1}$  también continuo (una homeomorfismo), tal que

- soluciones del sistema original (\*) y soluciones de su linealización alrededor  $x_*$  corresponden bajo  $h$ :

$$h(\xi(t)) = x(t)$$

para  $\xi(t)$  solución del linealización sería  $x(t)$  solución del sistema original (\*).

**Remark.** La demostración de Hartman-Grobman también usa la teorema de mapeos de contracción (teorema 6).

## A.5 funciones generalizadas

Nuestras formulaciones en estilo ‘operador’ de e.d.o. nos acercan al tema de funciones generalizadas. A saber considera un e.d.o. como operador diferencial:

$$\mathfrak{D} : \mathcal{F} \dashrightarrow \mathcal{F}$$

para  $\mathcal{F}$  un espacio apropiado de funciones. Encontrar soluciones al e.d.o. con dado parte no-homogénea  $f \in \mathcal{F}$  consiste en buscar:

$$u \in \mathcal{F}, \quad \text{t.q.} \quad \mathfrak{D}u = f.$$

Generalmente, sin imponer más condiciones (p.ej. iniciales/frontera) sobre la solución, serían varias soluciones  $u$  para dado  $f$ . Es decir  $\mathfrak{D}$  generalmente no es inyectiva. Estamos contentos típicamente encontrar solamente *uno* solución con dado  $f$ , es decir un gran avance sería lograr encontrar algún inverso derecha de  $\mathfrak{D}$ :

$$\mathfrak{G} : \mathcal{F} \dashrightarrow \mathcal{F}, \quad \text{t.q.} \quad \mathfrak{D} \circ \mathfrak{G} = id$$

(es decir  $u_p = \mathfrak{G}f$  es algún solución particular con parte no-homogénea  $f$  dado:  $\mathfrak{D}u_p = \mathfrak{D}\mathfrak{G}f = f$ ). Con la transformada de Laplace, aplicado a e.d.o. lineal con coeficientes constantes, hemos logrado obtener tal inverso derecha en forma de una convolución:

$$\mathfrak{G}f = f * g$$

donde  $g = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$ , y  $\mathfrak{D} = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$ .

**Remark.** Para funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  su convolución es la función  $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por:

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(t-u) du$$

(cuando la integral converge). Notar: si p.ej.  $f(t) = 0, g(t) = 0, \forall t < 0$  entonces  $(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$  (como las convoluciones que usamos con transformada de Laplace). Es común escribir la forma de solución convolución como:

$$(\mathfrak{G}f)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)G(t,u) du \tag{12}$$

donde tal función  $G(t,u)$  es conocido como un función de Green asociado al operador diferencial. Un operador en la forma (12) también es llamado una transformada integral con núcleo (o kernel)  $G(t,u)$ . Por ejemplo una función de Green asociado a una e.d.o. lineal con coeficientes constantes a que nos interesa soluciones definidos sobre  $t \geq 0$  sería:

$$G(t,u) = \begin{cases} g(t-u) & t \geq u \geq 0 \\ 0 & \text{o/w} \end{cases}$$

donde  $t \mapsto g(t)$  es solución al e.d.o. homogénea con  $g(0) = 0, g'(0) = 1$ .

Entonces vemos que la funcion de Green obtenemos usando un solución particular al e.d.o. a saber  $g(t) = \begin{cases} y(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$  donde  $y(t)$  es solución de  $\mathfrak{D}y = 0$  con  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ . Si preguntamos que e.d.o. satisface este  $g$  definido por partes, después de hacer transformada de Laplace vemos que satisface  $\mathfrak{D}g = \delta$  donde  $\mathcal{L}\delta = 1$ . Como vemos en los ejercicios arriba, no hay funciones continuo con  $\mathcal{L}f = 1$ , entonces si queremos describir  $g$  como solución de un e.d.o.  $\mathfrak{D}g = \delta$  tendríamos que expandir nuestra noción típica de función.

**Definition 4.** Sea  $\mathcal{F}$  un espacio vectorial de funciones. Una función generalizado es una transformación lineal

$$T : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Remark.** Generalmente hay más condiciones técnicas sobre la transformación lineal  $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  para que ‘cuenta’ como una función generalizado (como p.ej. continuidad de  $T$  en una topología apropiada sobre  $\mathcal{F}$ ).

El ejemplo principal es para  $\mathcal{F}$  el conjunto de funciones de bolto  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (funciones  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que son suaves ( $C^\infty$ ) y se anulan afuera algún intervalo compacto). Un función en el sentido normal  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , y continuo determine una función generalizado por haciendo promedios:

$$T_f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$$

(de hecho, físicamente o en práctica nunca conocemos valores exactos de algún función, sino solo sus valores promedios/aproximas). Entonces esta noción de función generalizado incluye las funciones en el sentido normal. Pero también incluye más, el ejemplo clásico es la función generalizado Dirac- $\delta$  (centrado por origen, 0):

$$\delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \varphi(0).$$

No existe función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  medible en el sentido normal tal que  $T_f = \delta$ , pero igual es común denotar aun:  $\varphi(0) = \delta \cdot \varphi =: \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\delta(x)dx$ . En particular, tenemos  $\mathcal{L}\delta = 1$ , o  $\mathcal{L}^{-1}(1) = \delta$  y igualmente podemos invertir más funciones  $F(s)$  si expandemos el dominio de la transformada de Laplace para incluir no solo funciones apropiados pero también funciones generalizadas apropiados. Ver por ejemplo la referencia <sup>3</sup> para una introducción con más detalles/precisión sobre funciones generalizadas. Por ejemplo, para resumir, dado  $\mathfrak{D} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  un operador diferencial *lineal* con coeficientes constantes si tenemos una función (generalizada)  $T_o$  tal que (llamado una *solución fundamental*):

$$\mathfrak{D}T_o = \delta$$

entonces tenemos soluciones generalizado al e.d.o.’s no homogénea por:

$$\mathfrak{G}f = f * T_o.$$

<sup>3</sup>R. Strichartz. *A guide to distribution theory and Fourier transforms*. World Scientific Publishing Company (2003).