

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Sistemas Dinámicos I (MAT-24210)

Primavera 2026

Tarea 10 (transformada de Laplace \approx capítulo 6 de Boyce-DiPrima)

1. Determinar la transformada de Laplace de las siguientes funciones

$$(a) f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

$$(b) g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ -2, & t \geq 1. \end{cases}$$

2. Determinar la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

$$(a) F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4s+3},$$

$$(b) F(s) = \frac{1}{s^2+4s+5},$$

$$(c) F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^3},$$

$$(d) F(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2+s-12},$$

$$(e) F(s) = \frac{1+s}{s^2-3s+2},$$

$$(f) F(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+4},$$

$$(g) F(s) = \frac{1}{3s^2+1},$$

$$(h) F(s) = \frac{e^{-2s}}{3s^2+1}$$

3. Utilizar la transformada de Laplace para resolver:

$$(a) y' - 2y = e^{3t}, \quad y(0) = 2,$$

$$(b) 3y' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \text{ donde } f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3, \\ 1, & t \geq 3 \end{cases}$$

4. Usando la transformada de Laplace, determina la solución del problema de valor inicial:

$$y'' + y = 4e^x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -3.$$

Compárelo con la solución que obtengas mediante el método de variación de parámetros.

5. Usando la transformada de Laplace, determina la solución del problema de valor inicial:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2 e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2.$$

6. Considera el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ y - 2x \end{pmatrix}$$

(a) Usando la transformada de Laplace, determina la solución general del sistema.

(b) Determina para qué condiciones iniciales (en $t = 0$) las soluciones $(x(t), y(t))$ del sistema convergen al origen cuando $t \rightarrow \infty$.

7. Usando la transformada de Laplace, determina la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} + y = \int_0^t (t - \tau) \cos \tau \, d\tau, \quad y(0) = 0.$$

8. Determina la transformada de Laplace de una e.d.o. lineal de tipo Cauchy-Euler:

$$t^2 y'' + a_1 t y' + a_0 y = 0.$$

Que es particular de la forma del ecuacion transformada?

9. Usando la transformada de Laplace, determina la solución general de:

$$t^2 y'' + 3t y' + y = 1, \quad (t > 0).$$

Compárelo con la solución que obtengas mediante el método de variación de parámetros.

10. Sabiendo que $y = y(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = f(x)$$

donde $f(x)$ es suave, y que la transformada de Laplace de $y(x)$ está dada por

$$\mathcal{L}[y(x)](s) = \frac{2}{(s^2 - 1)^2(s + 1)^2} + \frac{1}{(s - 1)^2}$$

determina f y las condiciones iniciales de $y(x)$; es decir, los valores de $y(0)$ e $y'(0)$.

Comentario: No existe funciones suaves, g , con $(\mathcal{L}g)(s) = 1$ o $(\mathcal{L}g)(s) = s$

11. La función de Gamma esta definido por:

$$\Gamma(n) := \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx.$$

(a) Para $n > 0$, demuestra que:

$$\mathcal{L}[t^{n-1}](s) = \Gamma(n) s^{-n}, \quad s > 0$$

Sugerencia: Considera un cambio de variable $st = x$ en la integral que define la transformada de Laplace.

(b) La función de Beta esta definido por:

$$B(n, m) := \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1} dx$$

Para $n, m > 0$, verifica que:

$$B(n, m) t^{n+m-1} = (f * g)(t)$$

donde $f(t) = t^{n-1}$, $g(t) = t^{m-1}$ ($y *$ es la convolución de funciones).

(c) Usando que $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$ y partes (a), (b) de este ejercicio usar la transformada de Laplace para deducir la identidad:

$$B(n, m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}.$$