Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Sistemas Dinámicos I (MAT-24210) **Primavera 2026**

Tarea 1 (Ecuaciones de variables separables)

---

1. Determinar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.
   (a) $dy/dx = -xy$
   (b) $dy/dx = x/y$
   (c) $dy/dx = -\frac{x}{y-3}$
   (d) $dy/dx - x^2y^2 = x^2$
   (e) $dy/dx = \frac{x+1}{8+2\pi\sin(\pi y)}$
   (f) $dy/dx = 3y^2 - y^2\sin(x)$
   (g) $dy/dt = 1 - t + y^2 - ty^2$
   (h) $y(dy/dx) = 3\sqrt{xy^2 + 9x}$.

2. Considera la siguiente ecuación diferencial de variables separables:

$$y' = e^{y-x}.$$

   (a) Determina la solución que pasa en el punto $(0, y_0)$, con $y_0 < 0$ (su valor inicial es $y(0) = y_0$). Para qué valor de y_0 la gráfica de la solución tiene como asíntota el eje Ox?
   (b) Determina la solución que pasa en el punto $(x_0, 0)$, con $x_0 < 0$ y determina cuál es su intervalo máximo de existencia (eso es: especificar el dominio conexo y maximal en que la solución esta definida).

3. Considera la ecuación diferencial de variables separables

$$y' = -3y^{4/3}\sin(x).$$

   Determina la solución de esta ecuación que satisface la condición inicial $y(\pi/2) = 8$, y determina el intervalo máximo de existencia de esa solución.

4. Calcula los valores de la constante $\mu \in \mathbb{R}$ que hacen que la ecuación diferencial

$$dx/dt = (\mu + \cos^2 t)x$$

   tenga una solución π-periódica no trivial (eso es: un solución $x(t)$, no-constante, tal que $x(t+\pi) = x(t)$).

5. Supongamos que una cierta población obedece el modelo logístico

$$dy/dt = ry(1 - y/k), \quad y(0) = y_0$$

   donde la constante $r > 0$ es la tasa de crecimiento per-cápita y la constante $k > 0$ es el soporte de carga poblacional. Si $y_0 = k/3$, encuentra el tiempo τ para el cual la población se ha duplicado con respecto a la población inicial.

6. El carbono-14 es un isótopo radioactivo que muestra decrecimiento exponencial en la cantidad de materia (los isótopos son átomos que difieren en el número de neutrones, por ejemplo, el C12 tiene 6 protones y 6 neutrones, el C14 tiene 6 protones y 8 neutrones). Sea $Q(t)$ la cantidad de carbono-14 en el tiempo t, y sea Q_0 la cantidad original de carbono-14. Entonces Q satisface la ecuación diferencial

$$Q' = -rQ.$$

   (a) Dada una cantidad inicial $Q(0) = Q_0$, encuentra una expresión para $Q(t)$ para cualquier tiempo t.

   (b) Supongamos que la vida media del carbono-14 es de 5730 años (la vida media de un isótopo, o "half-life", es el tiempo que tarda una cantidad de materia Q_0 en reducirse a la mitad, es decir, llegar a $Q_0/2$). Encuentra la constante de decrecimiento r para el carbono-14.

   (c) Supongamos que se descubre un fósil en el que la cantidad de carbono-14 residual es del 20% de la cantidad original. Determina la edad del fósil.

7. Sean $a \in \mathbb{R}$ una constante y $b(x)$ una función real continua en todo $\mathbb{R}$. Demuestra que, si todas las soluciones de $y' = ay$ son acotadas cuando $x \to \infty$, entonces lo mismo sucede con las soluciones de $z' = (a + b(x))z$, siempre que $\int |b(x)|dx < \infty$.

8. Considera la ecuación diferencial:

$$dy/dx = 1 + x^2 + y^2.$$

   Demuestra que el intervalo máximo de existencia de la solución con valor inicial $y(0) = 0$ esta contenida en el intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$.

   Sugerencia: Comparar con soluciones de $dy/dx = 1 + y^2$.