

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Sistemas Dinámicos I (MAT-24210)

Otoño 2026

Tarea 1 (Ecuaciones de variables separables)

1. Determinar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

- (a) $dy/dx = -xy$
- (b) $dy/dx = x/y$
- (c) $dy/dx = -\frac{x}{y-3}$
- (d) $dy/dx - x^2y^2 = x^2$
- (e) $dy/dx = \frac{x+1}{8+2\pi\sin(\pi y)}$
- (f) $dy/dx = 3y^2 - y^2\sin(x)$
- (g) $dy/dt = 1 - t + y^2 - ty^2$
- (h) $y\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{|xy^2 + 9x|}$.

2. Considera la siguiente ecuación diferencial de variables separables:

$$y' = e^{y-x}.$$

- (a) Determina la solución que pasa en el punto $(0, y_0)$, con $y_0 < 0$ (su valor inicial es $y(0) = y_0$). Para qué valor de y_0 la gráfica de la solución tiene como asíntota el eje Ox ?
- (b) Determina la solución que pasa en el punto $(x_0, 0)$, con $x_0 < 0$ y determina cuál es su intervalo máximo de existencia (eso es: especificar el dominio conexo y maximal en que la solución esta definida).

3. Considera la ecuación diferencial de variables separables

$$y' = -3y^{4/3}\sin(x).$$

Determina la solución de esta ecuación que satisface la condición inicial $y(\pi/2) = 8$, y determina el intervalo máximo de existencia de esa solución.

4. Calcula los valores de la constante $\mu \in \mathbb{R}$ que hacen que la ecuación diferencial

$$dx/dt = (\mu + \cos^2 t)x$$

tenga una solución π -periódica no trivial (eso es: una solución $x(t)$, no-constante, tal que $x(t+\pi) = x(t)$).

5. Supongamos que una cierta población obedece el modelo logístico

$$dy/dt = ry(1 - y/k), \quad y(0) = y_0$$

donde la constante $r > 0$ es la tasa de crecimiento per-cápita y la constante $k > 0$ es el soporte de carga poblacional. Si $y_0 = k/3$, encuentra el tiempo τ para el cual la población se ha duplicado con respecto a la población inicial.

6. El carbono-14 es un isótopo radioactivo que muestra decrecimiento exponencial en la cantidad de materia (los isótopos son átomos que difieren en el número de neutrones, por ejemplo, el C12 tiene 6 protones y 6 neutrones, el C14 tiene 6 protones y 8 neutrones). Sea $Q(t)$ la cantidad de carbono-14 en el tiempo t , y sea Q_0 la cantidad original de carbono-14. Entonces Q satisface la ecuación diferencial

$$Q' = -rQ.$$

- (a) Dada una cantidad inicial $Q(0) = Q_0$, encuentra una expresión para $Q(t)$ para cualquier tiempo t .
 - (b) Supongamos que la vida media del carbono-14 es de 5730 años (la vida media de un isótopo, o “half-life”, es el tiempo que tarda una cantidad de materia Q_0 en reducirse a la mitad, es decir, llegar a $Q_0/2$). Encuentra la constante de decrecimiento r para el carbono-14.
 - (c) Supongamos que se descubre un fósil en el que la cantidad de carbono-14 residual es del 20% de la cantidad original. Determina la edad del fósil.
7. En 1974, Stephen Hawking descubrió que los hoyos negros emiten una pequeña cantidad de radiación, lo que causa que se evaporen lentamente al paso del tiempo. De acuerdo a Hawking, la masa M del hoyo negro se reduce de acuerdo a la ecuación diferencial:

$$dM/dt = -k/M^2,$$

donde $k = 1.26 \times 10^{23} \text{ kg}^3/\text{año}$.

- (a) Determine la solución general de la ecuación.
 - (b) Si un hoyo negro tiene una masa inicial de $6 \times 10^{31} \text{ kg}$, determinar el tiempo en el que se desevaporará completamente.
8. Sean $a \in \mathbb{R}$ una constante y $b(x)$ una función real continua en todo $\mathbb{R}$. Demuestra que, si todas las soluciones de $y' = ay$ son acotadas cuando $x \rightarrow \infty$, entonces lo mismo sucede con las soluciones de $z' = (a + b(x))z$, siempre que $\int |b(x)|dx < \infty$.
9. Considera la ecuación diferencial:

$$dy/dx = 1 + x^2 + y^2.$$

Demuestra que el intervalo máximo de existencia de la solución con valor inicial $y(0) = 0$ esta contenida en el intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Sugerencia: Comparar con soluciones de $dy/dx = 1 + y^2$.