Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Sistemas Dinámicos I (MAT-24210) **Primavera 2026**

Tarea 1 (factores integrantes, substituciones)

---

1. Determinar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $e^y dx + xe^y dy = 0$

   (b) $2xydx - \frac{x^2}{y^2}dy = 0$

   (c) $(y\cos x + e^x)dx + \sin x dy = 0$

   (d) $\frac{2xy}{x^2-1}dx + \log(x^2-1)dy = 0.$

   (e) $xydx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0$

   (f) $(2y^2 + 3x)dx + 2xydy = 0$

   (g) $y(x + y + 1)dx + (x + 2y)dy = 0$

   (h) $6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0$

   (i) $\cos xdx + (1 + 2y)\sin xdy = 0$

   (j) $xdx + (x^2y + 4y)dy = 0$

   (k) $(x^2 + y^2 - 5)dx = (y + xy)dy$

2. Determinar el valor de la constante k de modo que la siguiente ecuación diferencial sea exacta, posteriormente resolverla:

$$(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0.$$

3. Determinar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales con los valores iniciales indicados (en caso de no ser indicados, encuentra sus soluciones generales):

   (a) $y' + y = x,\ y(0) = 2$

   (b) $y'\cot x + y = 2,\ y(\pi/3) = -1$

   (c) $(x^2 - 1)y' + 2xy = x$

   (d) $y' = y\tan x - \sec x$

   (e) $y' + \left(4x - \frac{1}{x}\right)y = 4x^2$

4. A veces una EDO de primer orden no es lineal en una variable, pero sí lo es en la otra variable. Por ejemplo, la ecuación

$$dy/dx = \frac{1}{x + y^2}$$

no es lineal en la variable y. Sin embargo, su recíproca

$$dx/dy = x + y^2$$

es lineal en la variable x. Resuelve la segunda ecuación, obteniendo así una solución implícita para la primera ecuación de x en terminos de y.

5. Determina una solución explícita del problema de valor inicial

$$y' - xy = g(x), x > 1; y(1) = 2$$

donde $g(x) = \begin{cases} 0, & 1 \leq x < 4 \\ x, & x \geq 4 \end{cases}$.

6. Considera una ecuación linear de la forma:

$$dy/dx + ay = g(x)$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es constante, $a > 0$, y tal que $\lim_{x\to\infty} g(x) = b \neq 0$. Demuestra que para cualquier solución $y(x)$, tenemos $\lim_{x\to\infty} y(x) = b/a$.

Sugerencia: Usar regla de L'Hopital.

7. Determina la solución de la ecuación diferencial

$$y'' = 2x(y')^2,$$

que verifica las condiciones iniciales $y(1) = 0$ e $y'(1) = -1/2$ e indica cuál es su intervalo máximo de existencia.

8. Determina la solución de la ecuación diferencial

$$y'' = -yy',$$

que verifica las condiciones iniciales $y'(0) = 1/2$ e $y(0) = 0$ e indica cuál es su intervalo máximo de existencia.

9. Sean a, b, c constantes reales tales que $b \neq 0$. Considera la ecuación diferencial

$$y' = f(ax + by + c),$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua.

(a) Comprueba que el cambio de variable $u = ax + by + c$, transforma la ecuación dada en una ecuación de variables separables.

(b) Utilizando el cambio de variable mencionado en el inciso anterior, resuelve el problema de valor inicial

$$y' = -2 + e^{2x+y-1}, \quad y(0) = 1$$

indicando el intervalo máximo de existencia de la solución.

10. Determinar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $dy/dx = \frac{x^2+xy-y^2}{x^2}$,

   (b) $y' = e^{x/y} + y/x$,

   (c) $xyy' = x^2 - y^2$,

   (d) $dy/dx = \frac{3x-y-5}{3y-x+7}$,

   (e) $dy/dx = 3\frac{y}{x} + \frac{x^2}{\log y - \log x^3}$.

11. Determina explícitamente la solución del problema de valor inicial

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$$

   con valor inicial $y(1) = 1$, indicando el intervalo máximo de existencia de la solución.

12. Considera un ecuación de Ricatti:

$$(*) \qquad dy/dx = a(x) + 2b(x)y + c(x)y^2.$$

   (a) Verifica que para un cambio de variable de la forma $y = \lambda(x)Y$ donde $\lambda \neq 0$ satisface $d\lambda/dx = 2b(x)\lambda$, la ecuación de Ricatti $(*)$ se transforma a:

$$dY/dx = A(x) + C(x)Y^2$$

   para $A = a/\lambda, C = \lambda c$.

   (b) Suponer que $y = f_0(x)$ es algún solucion particular del ecuación de Ricatti $(*)$. Verifica que para un cambio de variable de la forma $Y = \frac{1}{y-f_0(x)}$, la ecuación de Ricatti $(*)$ se transforma al ecuación lineal:

$$dY/dx = A(x)Y + B(x)$$

   donde $A = -2(b + cf_0), B = -c$.

   (c) Suponer que $y = f_0(x)$, e, $y = f_1(x)$ son algunas soluciones particular del ecuación de Ricatti $(*)$. Verifica que para un cambio de variable de la forma $Y = \frac{y-f_1(x)}{y-f_0(x)}$, la ecuación de Ricatti $(*)$ se transforma al ecuación lineal (homogenea):

$$dY/dx = C(x)Y$$

   donde $C = (f_1 - f_0)c$.