

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Sistemas Dinámicos I (MAT-24210)

Otoño 2026

Tarea 2 (ecuaciones lineales, factores integrantes, sustituciones)

1. Determinar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales en forma de curvas implícitas:

- (a) $e^y dx + xe^y dy = 0$
- (b) $(y \cos x + e^x) dx + \sin x dy = 0$
- (c) $xy dx + (2x^2 + 3y^2 - 20) dy = 0$
- (d) $y(x + y + 1) dx + (x + 2y) dy = 0$
- (e) $6xy dx + (4y + 9x^2) dy = 0$
- (f) $\cos x dx + (1 + 2y) \sin x dy = 0$
- (g) $x dx + (x^2 y + 4y) dy = 0$
- (h) $(x^2 + y^2 - 5) dx = (y + xy) dy$

2. Determinar el valor de la constante k de modo que la siguiente ecuación diferencial sea exacta ($Mdx + Ndy = 0$ es llamado exacta cuando $M_y = N_x$) posteriormente determina su solución general como curvas implícitas:

$$(y^3 + kxy^4 - 2x) dx + (3xy^2 + 20x^2y^3) dy = 0.$$

3. Demuestra el Lemma de Poincaré directamente en la siguiente manera. Suponer que $A(x, y), B(x, y)$ satisfacen $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$. Verifica que la función:

$$\varphi(x, y) = \int_{x_o}^x A(u, y_o) du + \int_{y_o}^y B(x, v) dv$$

satisface $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = A$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = B$.

Comentario: La formula para φ aqui sale por una integral de linea (de (x_o, y_o) a (x, y)). Que esta independiente de sendero sigue de $A_y = B_x$ y teorema de Green.

4. Determinar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales con los valores iniciales indicados (en caso de no ser indicados, encuentra sus soluciones generales):

- (a) $y' + y = x$, $y(0) = 2$
- (b) $y' \cot x + y = 2$, $y(\pi/3) = -1$
- (c) $(x^2 - 1)y' + 2xy = x$
- (d) $y' = y \tan x - \sec x$
- (e) $y' + \left(4x - \frac{1}{x}\right)y = 4x^2$

5. Considera una ecuación lineal de la forma:

$$dy/dx + ay = g(x)$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es constante, $a > 0$, y tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b \neq 0$. Demuestra que para cualquier solución $y(x)$, tenemos $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = b/a$.

Sugerencia: Usa regla de L'Hopital.

6. A veces una EDO de primer orden no es lineal en una variable, pero sí lo es en la otra variable. Por ejemplo, la ecuación

$$dy/dx = \frac{1}{x+y^2}$$

no es lineal en la variable y . Sin embargo, su recíproca

$$dx/dy = x + y^2$$

es lineal en la variable x . Resuelve la segunda ecuación, obteniendo así una solución implícita para la primera ecuación de x en términos de y .

7. Determinar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales en forma implícita:

(a) $dy/dx = \frac{x^2+xy-y^2}{x^2},$

(b) $y' = e^{y/x} + y/x,$

(c) $xyy' = x^2 - y^2,$

(d) $dy/dx = \frac{3x-y-5}{3y-x+7},$

(e) $dy/dx = 3\frac{y}{x} + \frac{x^2}{\log y - \log x^3}.$

8. Sean a, b, c constantes reales tales que $b \neq 0$. Considera la ecuación diferencial

$$y' = f(ax + by + c),$$

donde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

- (a) Comprueba que el cambio de variable $u = ax + by + c$, transforma la ecuación dada en una ecuación de variables separables.
 (b) Utilizando el cambio de variable mencionado en el inciso anterior, resuelve el problema de valor inicial

$$y' = -2 + e^{2x+y-1}, \quad y(0) = 1$$

indicando el intervalo máximo de existencia de la solución.

9. Recuerda que para una e.d.o. 2' da orden de la forma:

$$x'' = f(x)$$

podemos reducir a una familia de e.do. 1' er orden $\frac{(x')^2}{2} + V(x) = c$, para c un constante y $V'(x) = -f(x)$ la potencial. Haz un dibujo de las trazas de soluciones en el plano (x, x') para:

(a) $x'' = -x$

(b) $x'' = -\sin x$

(c) $x'' = 3x^2 - 1$

10. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dibuja las curvas en el plano xy que son trazado por las soluciones de:

(a) $dz/dt = z$ (es decir $\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} = x + iy$, o, la sistema $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}$),

(b) $dz/dt = z^2,$

(c) $dz/dt = z^3.$

11. Determina explícitamente la solución del problema de valor inicial

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$$

con valor inicial $y(1) = 1$, indicando el intervalo máximo de existencia de la solución.

12. Dibuja en el plano xy las soluciones de la e.d.o. implícita:

$$y = \left(\frac{dy}{dx} + kx \right)^2$$

para varios valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

Comentario: Para una e.d.o. implícita en esta forma diferenciando los dos lados respecto a x conduce a una e.d.o. 1'º orden para $p = dy/dx$.

13. Considera una ecuación de Ricatti:

$$(*) \quad dy/dx = a(x) + 2b(x)y + c(x)y^2.$$

- (a) Verifica que para un cambio de variable de la forma $y = \lambda(x)Y$ donde $\lambda \neq 0$ satisface $d\lambda/dx = 2b(x)\lambda$, la ecuación de Ricatti (*) se transforma a:

$$dY/dx = A(x) + C(x)Y^2$$

para $A = a/\lambda, C = \lambda c$.

- (b) Suponer que $y = f_0(x)$ es alguna solución particular de la ecuación de Ricatti (*). Verifica que para un cambio de variable de la forma $Y = \frac{1}{y-f_0(x)}$, la ecuación de Ricatti (*) se transforma a la ecuación lineal:

$$dY/dx = A(x)Y + B(x)$$

donde $A = -2(b + cf_0), B = -c$.

- (c) Suponer que $y = f_0(x)$, e, $y = f_1(x)$ son dos soluciones particulares de la ecuación de Ricatti (*). Verifica que para un cambio de variable de la forma $Y = \frac{y-f_1(x)}{y-f_0(x)}$, la ecuación de Ricatti (*) se transforma a la ecuación lineal (homogénea):

$$dY/dx = C(x)Y$$

donde $C = (f_1 - f_0)c$.

- (d) Suponer que $y = f_0(x)$, e, $y = f_1(x)$, e, $y = f_2(x)$ son tres soluciones particulares de la ecuación de Ricatti (*). Verifica que la solución general, $y = f(x)$, de (*) está determinada explícitamente por:

$$\left(\frac{f(x) - f_1(x)}{f(x) - f_2(x)} \right) \left(\frac{f_0(x) - f_2(x)}{f_0(x) - f_1(x)} \right) = c$$

para c algún constante.

Comentario: La expresión en parte (d) es la razón anarmónica de $f_0(x), f_1(x), f_2(x), f(x)$.