Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Sistemas Dinámicos I (MAT-24210) Primavera 2026

Tarea 3 (repaso, e.d.o. implicita)

---

1. Primer indicamos algunos mas problemas de practica para revisar y seguir practicando sobre los métodos aprendemos en nuestro primer parte (soluciones explicitas de 1'er orden e.d.o.). Esta material coresponde a capitulo 2 del referencia Boyce-DiPrima (disponible en pdf en CANVAS) donde puedes encontrar mas problemas para practicar en las siguientes paginas relevantes:

   (a) e.d.o. 1'er orden lineal: pp. 61-63 de pdf (pp. 39-41 de libro).
   Por ejemplo: # 1,4,7, 16, 21, 28, 30-33, 38-42

   (b) seperacion de variables: pp. 69-71 de pdf (pp. 47-49 de libro).
   Por ejemplo: # 1,5, 19,20, 29

   (c) ecuaciones de forma $dy/dx = f(y/x)$: p. 71 de pdf (p. 49 de libro), #'s 30-38.

   (d) ecuaciones de Bernoulli: p. 99 de pdf (p. 77 de libro), #'s 27-31.

   (e) factor integrantes: pp. 121-123 de pdf (pp. 99-101 de libro).
   Por ejemplo: # 3, 5, 12, 16, 24, 25, 30, 31

   (f) compilación de problemas: pp. 154-157 de pdf (pp. 132-135 de libro). Por ejemplo: #'s 33-35 (Ricatti), y #'s 36-51 para metodos de reducir especial e.d.o.'s 2'da orden al e.d.o.'s de 1'er orden.

2. En buscando factores integrantes, hay algunos situaciones especial mencionamos. Recordamos que dado un e.d.o. en la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

   tenemos un factor integrante $\mu(x,y)$ cuando satisfacemos la ecuacion diferencial parcial $(\mu M)_y = (\mu N)_x$ que expande en:

$$\mu_y M - \mu_x N = \mu(N_x - M_y).$$

   (a) Verifica que, en caso que $\frac{N_x - M_y}{M} = g(y)$ depende solamente de y, entonces

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy}$$

   es un factor integrante. Explica porque cuando $\frac{N_x - M_y}{M}$ depende de manera no trivial en x, no seria posible encontrar factor integrante que depende solamente de y.

   (b) Un funcion $f(x,y)$ es homogeneo de grado k cuando $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)$. Muestra que un funcion homogeneo de grado k satisface:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = kf.$$

   Sugerencia: Usar regla de cadena para diferenciar f en la direccion radial.

   (c) Supone que $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k M(x,y)$ y $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k N(x,y)$ son homogeneo de grado k. Muestra que:

$$\mu = \frac{1}{xM + yN}$$

   es un factor integrante.

3. Considera un sistema lineal de la siguiente forma:

$$dx/dt = \alpha(t)x + \beta(t)y, \quad dy/dt = \gamma(t)x + \delta(t)y.$$

Muestra que el pendiente $p(t) = y(t)/x(t)$ a lo largo un solucion de tal sistema lineal satisface un ecuacion de Ricatti:

$$dp/dt = a(t) + b(t)p + c(t)p^2$$

con coeficientes $a = \gamma,\ b = \delta - \alpha,\ c = -\beta$.

4. Describe las soluciones de los siguientes ecuaciones diferenciales implicitas (como curvas implicitas, o parametrizados):

   (a) $y(1 - (y')^2) = 2y'x$

   (b) $y = 2xy' - y(y')^2$

   (c) $x^2(y')^2 + 2xyy' = 3y^2$

   (d) $y = x(y' - (y')^3)$

   (e) $(y')^3 + 4xy' = 8y$

5. Un ecuacion diferencial implicita de la siguiente forma:

$$y = x\frac{dy}{dx} + f(\frac{dy}{dx})$$

para algun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suave, es llamado un ecuacion diferencial de Clairaut.

   (a) Determina la solucion general al ecuacion de Clairaut, como curvas implicitas o parametrizados.

   (b) Resuelve la ecuacion de Clairaut:

$$y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$$

   y hacer un bosquejo de las soluciones.

   (c) La envolvente (o 'envelope') de un familia de curvas implicitas $\varphi(x, y, c) = 0$, que depende por un parametro c son los puntos en el plano xy (si existen) que satisfacen las ecuaciones:

$$\varphi(x, y, c) = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial c}(x, y, c) = 0.$$

   Determina el 'envelope' de la siguiente familia de circulos:

$$(x - 2c)^2 + y^2 = c^2.$$

   (d) Muestra que las soluciones de un ecuacion de Clairaut general forman un familia de lineas que dependen por un parametro c, y que tienen un otra solucion (solucion singular) por su 'envelope'.