

# Instituto Tecnológico Autónomo de México

## Departamento de Matemáticas

### Sistemas Dinámicos I (MAT-24210)

Otoño 2026

#### Tarea 3 (método de series, linealización)

---

1. Encuentra una solución en serie de potencias alrededor de  $x = 0$  de las siguientes ecuaciones diferenciales con condición inicial  $y(0) = y_0$ .

(a)  $y' = xy$

(b)  $y' = e^{-x^2}y$

(c)  $y' - xy = 1 + x$

2. Encuentra las expansiones hasta orden 3:  $y = y_0 + y_1x + y_2x^2 + y_3x^3 + \dots$ , en serie de potencias alrededor de  $x = 0$  de las soluciones a las siguientes ecuaciones diferenciales con valor inicial  $y(0) = y_0$ :

(a)  $y' = x^3 - y^3$

(b)  $y' = 1 + x^2 + y^2$

(c)  $y' = \sin(xy)$ .

3. Considera la siguiente ecuación diferencial que depende de un parámetro  $\mu \in \mathbb{R}$ :

$$y' = -y + \mu x^2 y^2.$$

Suponiendo que una serie de potencias en el parámetro  $\mu$ :

$$y = s_0(x) + \mu s_1(x) + \mu^2 s_2(x) + \dots$$

sea solución de este sistema, con valor inicial  $y(0) = s_0(0) = 1$ , determina fórmulas explícitas para los primeros dos coeficientes:  $s_0(x), s_1(x)$ .

4. También podemos aplicar el método de expansión a ecuaciones diferenciales de orden más alto, o a sistemas. Encuentra las expansiones en serie de potencias de las soluciones a las siguientes ecuaciones diferenciales con los valores iniciales dados:

(a)  $\frac{d^2y}{dx^2} = xy$  con  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y_1$  alrededor de  $x = 0$ .

(b)  $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un parámetro. Encuentra la expansión de las soluciones con valores iniciales  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ . Como parecen tales expansiones para  $\lambda = 2$ ?  $\lambda = 6$ ?

(c) Para el sistema  $dx/dt = xy$ ,  $dy/dt = tx^2$  con valores iniciales  $x(0) = x_0, y(0) = 0$ , encuentra los primeros términos de sus expansiones en  $t$  hasta orden 3.

5. Considera una solución,  $x(t)$ , de la ecuación del péndulo:

$$x'' = -\sin x$$

con condición inicial  $x(0) = \varepsilon, x'(0) = 0$ . Demuestra que el periodo  $T(\varepsilon)$  de tal solución tiene la expansión en potencias de  $\varepsilon$  dada por:

$$T(\varepsilon) = 2\pi + \frac{\pi}{8}\varepsilon^2 + \dots$$

6. Para  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , considera el siguiente campo de líneas definido por partes:

$$\begin{cases} 0 = \sqrt{r-x} dx - \sqrt{r+x} dy & ; \quad y \geq 0 \\ 0 = \sqrt{r-x} dx + \sqrt{r+x} dy & ; \quad y \leq 0 \end{cases}.$$

- (a) Encuentra las curvas integrales.  
 (b) Es posible que este campo de líneas esté dirigido por algún campo vectorial continuo?

*Comentarios:* Para (a) tenemos una e.d.o. homogénea (p.ej. sustitución  $y = ux$ ). Para (b) puedes pensar sobre qué dirección podría tener tal campo vectorial a lo largo del eje  $x$  positivo.

7. Considera el siguiente campo de líneas de la forma:

$$(*) \quad (x + axy - by^2)dx + (y + bxy - ax^2)dy = 0$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$  son parámetros.

- (a) Convierte  $(*)$  a coordenadas polares:  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ .  
 (b) Describe cómo las curvas integrales de  $(*)$  dependen de los parámetros  $a, b$ .  
 8. Considera un sistema lineal no autónomo (es decir, sus coeficientes dependen de ' $t$ ')

$$(*) \quad dx/dt = \alpha(t)x + \beta(t)y, \quad dy/dt = \gamma(t)x + \delta(t)y.$$

- (a) Muestra que la pendiente  $p = y/x$  a lo largo de una solución de  $(*)$  satisface una ecuación de Riccati:

$$dp/dt = a(t) + 2b(t)p + c(t)p^2$$

y determina los coeficientes  $a, b, c$  en términos de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

- (b) Supón que  $\gamma \neq 0$ . Si  $t \mapsto (x(t), y(t))$  es alguna solución de  $(*)$ , muestra que  $y(t)$  satisface una e.d.o. de 2º orden de la forma:

$$(**) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y = 0$$

y determina los coeficientes  $a_1, a_0$  en términos de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Recíprocamente, verifica que una solución  $y(t)$  de  $(**)$  genera una solución  $(x(t), y(t))$  del sistema original  $(*)$  para  $x := \frac{y' - \delta y}{\gamma}$ .

9. Considera la función valor absoluto  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto |x|$ . Muestra que  $f$  es Lipschitz en  $\mathbb{R}$  (es decir, existe alguna constante  $L > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ ).

*Sugerencia:* Es posible tomar la constante  $L$  como  $L = 1$ . Considera la desigualdad triangular aplicada a  $|x| = |x - y + y|$ , y similarmente a  $|y| = |y - x + x|$ .

10. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  (es decir,  $f$  es diferenciable con derivada continua). Para  $x_0 \in \mathbb{R}$ , muestra que  $f$  es Lipschitz alrededor de  $x_0$  (es decir, existe alguna constante  $L > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$  para todo  $x, y$  en algún intervalo alrededor de  $x_0$ ).

*Sugerencia:* Usa el teorema del valor medio.

11. En este ejercicio vas a demostrar el *Lema de Gronwall*, que es una herramienta poderosa para establecer teoremas de comparación entre soluciones de ecuaciones diferenciales.

Sean  $u, v, c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $u, v$  son continuas, y  $c$  es diferenciable y positiva. Supón que tales funciones satisfacen la desigualdad:

$$v(t) \leq c(t) + \int_0^t u(s)v(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

(a) Define  $R(t) := \int_0^t u(s)v(s) ds$ . Muestra que  $\frac{dR}{dt} - uR \leq uc$ .

(b) Usa un factor integrante  $\mu(t)$  para escribir la desigualdad de la parte (a) en la forma:

$$\frac{d}{dt}(\mu R) \leq \mu uc.$$

(c) Integra ambos lados de la desigualdad de la parte (b) de 0 a  $t$  y, haciendo una integración por partes (nota:  $\mu' = -u\mu$ ), reordénala en la forma de la desigualdad de Gronwall:

$$v(t) \leq c(0)e^{\int_0^t u(s)ds} + \int_0^t c'(s)e^{\int_s^t u(\tau)d\tau} ds.$$

12. En este ejercicio vas a demostrar una teorema de comparacion usando la Lema de Gronwall del ejercicio anterior. Considera una e.d.o. de 1'er orden:

$$(*) \quad dy/dt = p(t, y)$$

tal que  $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es Lipschitz en  $y$  (es decir existe un constante  $L > 0$  tal que  $|p(t, y_1) - p(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ ).

Sea  $y_1(t), y_2(t)$  dos soluciones de  $(*)$ , definidos sobre el intervalo  $t \in [a, b]$ .

(a) Pon  $z(t) := y_1(t) - y_2(t)$ . Muestra que:

$$|z(t)| \leq |z(a)| + \int_a^t L|z(s)| ds$$

para todo  $t \in [a, b]$ .

*Comentario:* Recuerda  $|\int f(u) du| \leq \int |f(u)| du$ .

(b) Aplica la Lemma de Gronwall a la desigualdad de parte (a) para establecer que:

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq |y_1(a) - y_2(a)|e^{L(t-a)}$$

todo  $t \in [a, b]$ .

*Comentario:* Considera la Lemma de Gronwall con  $v(t) = |z(t)|$ ,  $u(t) = L$ ,  $c(t) = |z(a)|$  en la notación del ejercicio anterior.