Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Sistemas Dinámicos I (MAT-24210) **Primavera 2026**

Tarea 4 (soluciones con series de poder)

---

1. Encuentra una solucion en serie de poder alrededor $x = 0$ de las siguientes ecuaciones diferenciales con condicion inicial $y(0) = y_o$.
   (a) $y' = xy$
   (b) $y' = e^{-x^2}y$
   (c) $y' - xy = 1 + x$

   Comentario: Las e.d.o.'s (b) y (c) no tienen soluciones explicitas en funciones elementarios (requieren $\mathrm{erf}(x)$).

2. Encuentra los expansiones hasta orden 3: $y = y_o + y_1x + y_2x^2 + y_3x^3 + ...$, en serie de poder alrededor $x = 0$ de soluciones a los siguientes ecuaciones diferenciales con dado valor inicial $y(0) = y_o$:
   (a) $y' = x^3 - y^3$
   (b) $y' = 1 + x^2 + y^2$
   (c) $y' = \sin(xy)$.

3. El método de expansiones se puede aplicar a gran variedad de situaciones. Por ejemplo a sistemas que dependen por parametros. Considera la siguiente ecuacion diferencial que depende de un parametro $\mu \in \mathbb{R}$:
   $$y' = -y + \mu x^2y^2.$$
   Supone que un serie de poder en el parametro μ:
   $$y = s_o(x) + \mu s_1(x) + \mu^2 s_2(x) + ...$$
   seria solucion a esta sistema, con valor inicial $y(0) = s_o(0) = 1$, determina formulas explicitas para los primeros dos coeficientes: $s_o(x), s_1(x)$.

   Comentario: La extension de teorema de Cauchy a ecuaciones diferenciales que dependen por parametros y la convergencia de expansiones en el parametro como la forma en este ejercicio forman la extension de Poincaré de la teorema de Cauchy.

4. Tambien podemos aplicar metodo de expansion al ecuaciones diferencial de mas alto orden, o sistemas. Encuentra expansiones en serie de poder de soluciones a los siguientes ecuaciones diferenciales con dado valores iniciales:
   (a) $\frac{d^2y}{dx^2} = xy$ con $y(0) = y_o,\ y'(0) = y_1$ alrededor $x = 0$.
   (b) $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parametro. Encuentra la expansion de soluciones con valores inicial $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Como parecen tales expansiones para $\lambda = 2$? $\lambda = 6$?
   (c) Para la sistema $dx/dt = xy, \quad dy/dt = tx^2$ con valores iniciales $x(0) = x_o, y(0) = 0$ y los primeros de sus expansiones en t hasta orden 3.

5. Considera una sistema de la siguiente forma:

$$dx/dt = \alpha(t)x + \beta(t)y, \quad dy/dt = \gamma(t)x + \delta(t)y$$

con $\gamma \neq 0$. Si $t \mapsto (x(t), y(t))$ es algún solución a tal sistema, muestra que $y(t)$ satisface un e.d.o. de 2'da orden de la forma:

$$(*) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = 0.$$

Conversamente, verifica que dado un solución $y(t)$ al e.d.o. 2'da orden $(*)$ que obtenemos una solucion $(x(t), y(t))$ al sistema original en poner $x(t) := \frac{y'(t) - \delta(t)y(t)}{\gamma(t)}$.

6. En este ejercicio vas a establecer la *Lemma de Gronwall*, que es una herramienta poderosa en establecer teoremas de comparicion entre soluciones de ecuaciones diferenciales.

Sea $u, v, c : [0, T] \to \mathbb{R}$ donde u, v son continuos, y c es diferenciable y positiva. Suponer que tales funciones satisfacen le desigualidad:

$$v(t) \leq c(t) + \int_0^t u(s)v(s)\, ds, \quad t \in [0, T].$$

   (a) Pon $R(t) := \int_0^t u(s)v(s)\, ds$. Muestra que $\frac{dR}{dt} - uR \leq uc$.

   (b) Usar un factor integrante $\mu(t)$ para escribir la desigualidad de parte (a) en la forma:

$$\frac{d}{dt}(\mu R) \leq \mu uc.$$

   (c) Integrar los dos lados del desigualidad en parte (b) de 0 a t y haciendo un integración por partes (nota: $\mu' = -u\mu$), re-arreglar en la forma de la desigualidad de Gronwall:

$$v(t) \leq c(0)e^{\int_0^t u(s)ds} + \int_0^t c'(s)e^{\int_s^t u(\tau)d\tau} ds.$$

7. Considera la función de valor absoluto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto |x|$. Muestra que f es Lipschitz en $\mathbb{R}$ (es decir existe algún constante $L > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$).

   Sugerencia: Es posible tomar la constante L como $L = 1$. Considera desigualidad de triangulo aplicado a $|x| = |x - y + y|$, y similarmente $|y| = |y - x + x|$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 (es decir f es diferenciable con derivada continuo). Para $x_o \in \mathbb{R}$, muestra que f es Lipschitz alrededor x_o (es decir existe algún constante $L > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ para todos x, y en algún intervalo alrededor x_o).

   Sugerencia: Usa teorema valor medio.