

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Sistemas Dinámicos I (MAT-24210)

Primavera 2026

Tarea 5 (sistemas lineal)

1. En las siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineal, determinar la solución general, y en caso de que se pida el solución al problema con dado valor inicial.

(a) $d\mathbf{x}/dt = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

(b) $d\mathbf{x}/dt = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

(c) $d\mathbf{x}/dt = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(-2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $d\mathbf{x}/dt = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(e) $d\mathbf{x}/dt = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

(f) $d\mathbf{x}/dt = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

(g) $d\mathbf{x}/dt = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

(h) $d\mathbf{x}/dt = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

2. En las siguientes de ecuaciones diferenciales lineal de 2'da orden, determinar la solución general, y en caso de que se pida el solución al problema con dado valor inicial.

(a) $y'' + 2y' - 2y = 0$

(b) $y'' - 2y' + 2y = 0$

(c) $y'' - 9y' + 9y = 0$

(d) $y'' + 8y' - 9y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$

(e) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

3. Determina los valores de parámetro λ de modo que el siguiente problema con dados valores de frontera:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(\pi/2) = 0$$

admita una solución no idénticamente nula.

4. Determina los valores de parámetro α de modo que cada solución a la ecuación diferencial:

$$y'' - (2\alpha - 1)y' + \alpha(\alpha - 1)y = 0$$

tiene límite cero cuando $x \rightarrow \infty$.

5. En este ejercicio vas a establecer un teorema de comparacion usando la Lemma de Gronwall del tarea anterior (# 6 de tarea 4). Considera un e.d.o. de 1'er orden:

$$(*) \quad dy/dt = p(t, y)$$

tal que $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitz en y (es decir existe un constante $L > 0$ tal que $|p(t, y_1) - p(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ para cada $t \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$).

Sea $y_1(t), y_2(t)$ dos soluciones de $(*)$, definidos sobre el intervalo $t \in [a, b]$.

- (a) Pon $z(t) := y_1(t) - y_2(t)$. Muestra que:

$$|z(t)| \leq |z(a)| + \int_a^t L|z(s)| \, ds$$

para todo $t \in [a, b]$.

Comentario: Recuerda $|\int f(u) \, du| \leq \int |f(u)| \, du$.

- (b) Aplica la Lemma de Gronwall a la desigualdad de parte (a) para establecer que:

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq |y_1(a) - y_2(a)|e^{L(t-a)}$$

todo $t \in [a, b]$.

Comentario: Considera la Lemma de Gronwall con $v(t) = |z(t)|$, $u(t) = L$, $c(t) = |z(a)|$ en la notación del tarea anterior (# 6 de tarea 4).

Comentario: La teorema de comparacion en parte (b) de este ejercicio establece que soluciones a tales ecuaciones diferenciales con dado valor inicial serian únicas. Ademas esta tipo de demostración aqui aplica tambien para sistemas de e.d.o.