

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Sistemas Dinámicos I (MAT-24210)

Otoño 2026

Tarea 5 (más e.d.o. lineales)

1. En las siguientes ecuaciones diferenciales tipo Cauchy-Euler, determinar la solución general, y en caso de que se pida la solución al problema con dado valor inicial.

(a) $y''' + x^{-1}y'' - x^{-2}y' = 0$.

(b) $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

(c) $y'' - \left(\frac{4\pi^2 - 1}{4x^2}\right)y = 0$, que satisface las condiciones iniciales $y(1) = 0$, y, $y'(1) = 2\pi$.

(d) $(x+1)^2y'' - (x+1)y' - 3y = 0$, que satisface las condiciones iniciales $y(-2) = 0$, y, $y'(-2) = 1$.

2. Encuentra la solución general de

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0,$$

dado que $y_1 = x$ es una solución particular.

3. Encuentra la solución general de

$$y'' = (2 \sec^2 x) y,$$

dado que $y_1 = \tan x$ es una solución particular.

4. Usar reducción de orden para encontrar la solución general de la siguiente e.d.o. 3'er orden

$$x^3y''' - x^2(x+3)y'' + 2x(x+3)y' - 2(x+3)y = 0$$

dado que admite la solución particular $y_p = x$.

5. Considera un sistema lineal: $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Supón que para cada solución $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ de tal sistema, tenemos $|\mathbf{x}(t)| = \text{constante}$. Demuestra que $A(t)$ son anti-simétricas:

$$A(t)^T = -A(t).$$

6. Sea $t \mapsto L(t)$ una curva de matrices invertibles $n \times n$ (con entradas que dependen por t en manera diferenciable).

(a) Si $L(t_0) = I$, demuestra: $\frac{d}{dt}|_{t=t_0} \det L(t) = \text{tr}\left(\frac{d}{dt}|_{t=t_0} L(t)\right)$.

(b) En general, demuestra: $\frac{d}{dt}|_{t=t_0} \det L(t) = \det L(t_0) \text{tr}(L(t_0)^{-1} \frac{d}{dt}|_{t=t_0} L(t))$.

Sugerencia: Aplica parte (a) al $t \mapsto L(t_0)^{-1}L(t)$.

7. ¿Es posible que cada solución, $y(x)$, de la e.d.o.:

$$y'' = xy' + f(x)y$$

tiene $y(x) \rightarrow 0, y'(x) \rightarrow 0$ mientras $x \rightarrow \infty$? *Sugerencia:* Considere el Wronskiano.

8. Considera una e.d.o. de la forma: $\frac{d^2y}{dx^2} = a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + bx\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes. Demuestra que después el cambio de variable: $X = y, Y = x$, tal e.d.o. se transforma al siguiente e.d.o. lineal con coeficientes constantes:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} + a\frac{dY}{dX} + bY = 0.$$

9. Hay unas cambios de variables común para normalizar la forma de 2' da orden e.d.o. lineal:

$$(*) \quad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

- (a) Determina un re-escalamiento apropiado de tal ecuacion: $\lambda(x)y'' + \lambda(x)a_1(x)y' + \lambda(x)a_0(x)y = \lambda(x)b(x)$, que convierte (*) a la forma de Sturm-Liouville:

$$(\alpha_2(x)y')' + \alpha_0(x)y = \beta(x).$$

- (b) Determina un cambio de variable de la forma $X = f(x)$ que convierte (*) a la forma:

$$\frac{d^2y}{dX^2} + F(X)y = G(X).$$

- (c) Determina un cambio de variable de la forma $Y = \mu(x)y$ que convierte (*) a la forma:

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + \varphi(x)Y = \gamma(x).$$

- (d) Usar un cambio de variable apropiado para encontrar la solución general de la e.d.o.

$$y'' + xy' + \left(\frac{x^2 - 2}{4}\right)y = 0$$

10. Consider el siguiente e.d.o. no homogenea que depende por un parametro $A \in \mathbb{R}$:

$$y'' + y = 2A \cos x.$$

- (a) Cuantos soluciones satisface $y(0) = 0$, y, $y(\pi/2) = 0$?
 (b) Cuantos soluciones satisface $y(0) = 0$, y, $y(\pi) = 0$?
 (c) Cuantos soluciones satisface $y(0) = 0$, y, $y(\pi) = 1$?
 (d) Cuantos soluciones satisfaces $y'(0) = 0$, y, $y'(\pi) = 1$?

(Las respuestas pueden depender de valor de A).

11. Determinar las soluciones de los siguientes ecuaciones diferenciales:

- (a) $y'' - 3y' + 2y = \sin 5x$,
 (b) $y'' - y = e^x$,
 (c) $y'' - 4y' + 3y = \sin x$
 (d) $y'' + y' = 3e^{x/2}$, con valores iniciales: $y(0) = 4, y'(0) = 3$,
 (e) $y'' + y = \cos x$, con valores de frontera $y(0) = 0, y(\pi/2) = 0$, y $\int_0^{\pi/2} y dx = -1/2$,
 (f) $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4$, ($x > 0$),
 (g) $x^3y''' + 5x^2y'' + 3xy' = x^2$, ($x > 0$),
 (h) $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x$, ($x > 0$).

12. Utilizar el método de variación de parámetros para resolver los sistemas:

- (a) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$
 (b) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$
 (c) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

13. Considere la siguiente ecuación diferencial parcial (ecuación de ondas 1-dimensional)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Encuentra las soluciones de la forma particular (un ‘Ansatz de separación variables’)

$$u(x, t) = f(x)g(t),$$

que tienen $f(x + 2\pi) = f(x)$ periódico de periodo 2π .

14. En este ejercicio vas a establecer un caso particular de un teorema de comparación de Sturm. Sea $y(x)$, $Y(x)$ dos soluciones a unas e.d.o. de la forma:

$$y'' + a(x)y = 0, \quad Y'' + A(x)Y = 0$$

con condiciones iniciales $y(0) = 0, y'(0) > 0$, y, $Y(0) = 0, Y'(0) > 0$, y donde los coeficientes de los e.d.o.’s satisfacen:

$$A(x) > a(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Suponer que existe algún $x_1 > 0$ que es el primer valor después $x = 0$ en que $y(x_1) = 0$ (es decir $y(x) > 0$ para $x \in (0, x_1)$, y $y(x_1) = 0$). Demuestra que $y'(x_1) < 0$.

En las siguientes partes, vamos a establecer que hay un otro zero de $Y(x)$ antes que x_1 , es decir $Y(\xi) = 0$ algún $\xi \in (0, x_1)$.

- (b) Verifica que: $(y'Y - yY')' = (A - a)yY$.

- (c) Supón, en busca de una contradicción, que $Y(x) > 0$ para todos $x \in (0, x_1)$. Integrando de $x = 0$ a $x = x_1$ la ecuación de parte (b), deduce que:

$$0 < \int_0^{x_1} (A(x) - a(x))y(x)Y(x) dx = y'(x_1)Y(x_1).$$

- (d) De parte (a), que $y'(x_1) < 0$, y parte (c), que $0 < y'(x_1)Y(x_1)$, deduce que $Y(x_1) < 0$. Por continuidad de $Y(x)$, deduce que $Y(x_*) < 0$ para algún $x_* \in (0, x_1)$ (en contradicción de parte (c)). Concluir que necesariamente $Y(\xi) = 0$ algún $\xi \in (0, x_1)$, como deseamos.

- (e) Demostrar que cualquier solución de

$$Y'' + (1 + x^2)Y = 0$$

con condición inicial $Y(0) = 0$, tiene al menos un otro zero $Y(x_*) = 0$ para algún $x_* \in (0, \pi)$.

15. (Vectores propios generalizados). Sea $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal con polinomial característica

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^n, \quad (\lambda_1 \in \mathbb{R}).$$

- (a) Pon $E_k := \ker(A - \lambda_1 I)^k = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda_1 I)^k \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$. Demuestra que

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$$

y además: si $E_{k+1} = E_k$ entonces $E_{k+j} = E_k$ para todos $j \geq 0$.

- (b) Demuestra que $E_{k+1} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda_1 I)\mathbf{v} \in E_k\}$.

- (c) Demuestra que $E_n = \mathbb{R}^n$ (sugerencia: usa teorema Cayley-Hamilton).

16. Considere la siguiente demostración de la unicidad de soluciones para $dx/dt = ax$:

- (a) Sea $x_1(t) = e^{at}$ una solución particular, y supón que $x(t)$ es cualquier otra solución. Pon $y(t) := e^{-at}x(t)$. Diferenciar para deducir que $y'(t) = 0 \implies y(t) \equiv c$ es constante. Entonces cada solución está de la forma $x(t) = e^{at}c$.

- (b) Extiende la computación anterior a sistemas $d\mathbf{x}/dt = A\mathbf{x}$. ¿Cuáles propiedades de la exponencial de matrices necesitas?