

# Instituto Tecnológico Autónomo de México

## Departamento de Matemáticas

### Sistemas Dinámicos I (MAT-24210)

Primavera 2026

#### Tarea 6 (más sistemas lineal)

---

1. Estamos ahora comenzando material en capítulos  $\approx 3, 4, 7$  de Boyce-DiPrima. Más preciso las secciones relevantes donde encontramos más problemas para practicar son:

- ch. 3.1 (pg. 144): sistemas lineal 2' da orden (coeficientes constantes) raíces real distintas
- ch. 3.3 (pg. 163): sistemas lineal 2' da orden (coeficientes constantes) raíces complejas
- ch. 3.4 (pg. 171): sistemas lineal 2' da orden (coeficientes constantes) raíces repetidas
- ch. 4.2 (pg. 231): sistemas lineal orden  $n$  (coeficientes constantes)
- ch. 7.5 (pg. 398): sistemas lineal autónoma diagonalizables
- ch. 7.6 (pg. 409): sistemas lineal autónoma valores propios complejas
- ch. 7.8 (pg. 428): sistemas lineal autónoma valores propios repetidas.

2. En las siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineal, determinar la solución general, y en caso de que se pida el solución al problema con dado valor inicial.

(a)  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$

(b)  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x},$  con  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$

(c)  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x},$  con  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

(d)  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$

(e)  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$

(f)  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$

3. Sea  $m$  una constante positiva. Encuentra la solución particular de

$$y''' - my'' + m^2y' - m^3y = 0$$

sabiendo que se verifican las condiciones iniciales  $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1.$

4. Encuentra una ecuación diferencial lineal de orden 4 con coeficientes constantes tal que las funciones

$$y_1(x) = e^{-2x} \cos(3x), \quad y_2(x) = e^{-2x} \sin(3x), \quad y_3(x) = e^{-2x}, \quad y_4(x) = xe^{-2x}$$

sean sus soluciones.

5. Considere los siguientes sistemas que depende por un parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ , y dibuja los formas de sus soluciones como dependen por el valor de  $\alpha$ :

(a)  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

(b)  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ .

6. Sea  $f_\alpha(x)$  la solución del problema de valor inicial

$$y'' + 2\alpha y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

- (a) Determina  $f_\alpha$  para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
 (b) Encuentra todos los valores de  $\alpha$  tales que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_\alpha(x) = 0$ .
7. Para sistemas lineal con raices repetidas, una manera para encontrar la forma del solucion general es la siguiente:

- (a) Una sistema lineal 2' da orden con raiz repetida  $m \in \mathbb{R}$  tiene la forma general:

$$y'' - 2my' + m^2y = 0.$$

Sabiendo que  $y_1(t) = e^{mt}$  es un solucion particular suponer que  $y(t) = c(t)y_1(t) = c(t)e^{mt}$  es una solucion. Muestra que  $c(t)$  tiene que satisfacer  $c'' = 0$  para que  $c(t) = c_0 + c_1t$  y obtenemos la solucion general  $(c_0 + c_1t)e^{mt} = y(t)$ .

- (b) Una sistema lineal 3' ra orden con raiz repetida  $m \in \mathbb{R}$  de multiplicidad 3 tiene la forma general:

$$y''' - 3my'' + 3m^2y' - m^3y = 0$$

Sabiendo que  $y_1(t) = e^{mt}$  es un solucion particular, suponer que  $y(t) = c(t)y_1(t) = c(t)e^{mt}$  es una solucion. Muestra que  $c''' = 0$  para obtener la solucion general  $(c_0 + c_1t + c_2t^2)e^{mt} = y(t)$ .

8. La técnica del ejercicio anterior se aplica en más generalidad.

- (a) Considere un ecuacion diferencial lineal de 2' da orden con coeficientes general (que pueden depender de  $x$ , es decir un e.d.o. lineal 2' da orden no-autonoma):

$$(*) \quad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

y suponer que sabemos algún solucion particular:  $y_1(x)$  (no identicamente cero). Pon:

$$y(x) := c(x)y_1(x).$$

Demuestra que  $y(x)$  es solucion de  $(*) \iff c'(x) = u(x)$  es solucion a algún e.d.o. lineal de 1' er orden.

*Comentario:* Que sabemos un general proceso para resolver e.d.o. lineal de 1' er orden, concluimos que dado un solucion particular  $y_1(x)$  (no identicamente cero) al  $(*)$ , podemos encontrar su solucion general hasta calcular anti-derivadas (hasta quadratura). Para un e.d.o. lineal inicial de mas alta orden, y conocer un solucion particular, el mismo substitution  $y(x) = c(x)y_1(x)$  reduce resolver el e.d.o. original a resolver un e.d.o. lineal para  $c'(x) = u(x)$  de un orden menos.

- (b) Para el siguiente e.d.o.:

$$4x^2y'' + y = 0, \quad x > 0$$

encuentra algún solucion particular de la forma  $y_1(x) = x^n$ , y según el método de parte (a) despues encontra sus soluciones generales.

9. Encuentra la solución general al ecuación lineal de 4'ta orden:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

- (a) ¿Qué son las soluciones que son acotadas mientras  $x \rightarrow \infty$ ? Determina el e.d.o. que estas soluciones acotadas satisfacen.
  - (b) ¿Qué son las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -\frac{1}{3}y'''(0)$ ? Determina el e.d.o. que estas soluciones satisfacen.
10. El método de sustituciones (o cambio de variables) también podemos aplicar al e.d.o.'s de cualquier orden (aunque, igual que para e.d.o. de 1'er orden, no hay método general para decidir cual cambio variable elegir). Un particular forma de e.d.o. orden  $n$  no-autónoma (coeficientes no constantes) que podemos convertir a un e.d.o. orden  $n$  autónoma (coeficientes constantes) es de la siguiente forma:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

(llamado e.d.o. lineal de Cauchy-Euler).

- (a) Demuestra que la sustitución  $x = e^t$  (para  $x > 0$ ) convierte un e.d.o. lineal no-autónoma de orden 3 en la forma de Cauchy-Euler a algún e.d.o. lineal *autónoma* de orden 3.
- (b) Encuentra la solución general al siguiente e.d.o. lineal no-autónoma de orden 3:

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 5x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} = 0, \quad x > 0.$$