

# Instituto Tecnológico Autónomo de México

## Departamento de Matemáticas

Sistemas Dinámicos I (MAT-24210)

Primavera 2026

Tarea 7 (sistemas lineal no-autónoma)

---

---

1. En las siguientes ecuaciones diferenciales tipo Cauchy-Euler, determinar la solución general, y en caso de que se pida el solución al problema con dado valor inicial.

(a)  $y''' + x^{-1}y'' - x^{-2}y' = 0$ .

(b)  $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

(c)  $y'' - \left(\frac{4\pi^2-1}{4x^2}\right)y = 0$ , que satisface las condiciones iniciales  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = 2\pi$ .

(d)  $(x+1)^2y'' - (x+1)y' - 3y = 0$ , que satisface las condiciones iniciales  $y(-2) = 0$ ,  $y'(-2) = 1$ .

2. Considera la siguiente ecuación de Cauchy-Euler:

$$(x-a)^2y'' - |x-a|y' + a^2y = 0,$$

donde  $a \in \mathbb{R}$  es una constante.

(a) Determina la solución general de la ecuación diferencial dada.

(b) Para qué valores de  $a$  todas las soluciones de la ecuación diferencial son funciones acotadas en todo  $\mathbb{R}$ ?

3. Considera un sistema lineal:  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}$  para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , y suponer que para cada solución  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$  de tal sistema, tenemos  $|\mathbf{x}(t)| = \text{constante}$ . Demuestra que  $A(t)$  son anti-simétrical:

$$A(t)^T = -A(t).$$

4. Considera un e.d.o. de la forma:  $\frac{d^2y}{dx^2} = a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + bx\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$  donde  $a, b \in \mathbb{R}$  son constantes. Demuestra que después el cambio de variable:  $X = y, Y = x$ , tal e.d.o. se transforma al siguiente e.d.o. lineal con coeficientes constantes:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} + a\frac{dY}{dX} + bY = 0.$$

5. Encuentra la solución general de

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0,$$

dado que  $y_1 = x$  es un solución particular.

6. Encuentra la solución general de

$$y'' = (2\sec^2 x)y,$$

dado que  $y_1 = \tan x$  es un solución particular.

7. Para un e.d.o. lineal orden  $n$ , el principio general de reducción de orden dice que dado  $m$  soluciones particular independientes de tal e.d.o., se reduce a resolver algún e.d.o. lineal de orden  $n - m$ , y un secuencia de  $m$  cuadraturas (anti-derivadas). Consideramos tal reducción para e.d.o. lineal 3'er orden:

$$(*) \quad y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

- (a) Suponer que conocemos algún solución particular  $y_1(x) \neq 0$  de (\*). Demuestra que la solución general de (\*) es dado por  $y(x) = c(x)y_1(x)$  donde  $c(x)$  satisface un e.d.o. lineal de la forma:  $c''' + b_1(x)c'' + b_0(x)c' = 0$ , ó, para  $u = c'$  un e.d.o. lineal de orden 2:

$$(**) \quad u'' + b_1(x)u' + b_0(x)u = 0.$$

- (b) Suponer que conocemos *dos* soluciones particular  $y_1(x), y_2(x) \neq 0$  de (\*). Escribiendo:

$$y_2(x) = c_1(x)y_1(x)$$

deducir que tenemos un solución particular  $u_1(x) = c_1'(x) \neq 0$  de (\*\*). Demuestra que la solución general  $u(x)$  de (\*\*) es dado por  $u(x) = \gamma(x)u_1(x)$  donde  $\gamma(x)$  satisface un e.d.o. lineal de la forma:  $\gamma'' = a(x)\gamma'$ , ó, para  $v = \gamma'$  un e.d.o. lineal (seperable) de orden 1:

$$(***) \quad v' = a(x)v.$$

Deducir que, para  $v(x) = v_0 e^{\int a(x)dx} \neq 0$  un solución de (\*\*\*) la solución general al e.d.o. original (\*) esta dado por  $y(x) = c(x)y_1(x)$  despues las dos cuadraturas (anti-derivadas):  $\gamma = \int v dx$ , y  $c = \int \gamma u_1 dx$ .

- (c) Encuentra la solución general al 3'er orden e.d.o.:

$$(3 - 2x)y''' + (6x - 7)y'' - 4xy' + 4y = 0$$

dado que admite las dos soluciones particular:  $y_p = e^x$ ,  $\tilde{y}_p = x$ .

8. Sea  $t \mapsto L(t)$  una curva suave de matrices  $n \times n$  invertible (con entradas que dependen por  $t$ ).

- (a) Si  $L(t_0) = Id$ , demuestra:

$$\left. \frac{d}{dt} \det L(t) \right|_{t=t_0} = \text{tr} \left( \left. \frac{d}{dt} L(t) \right|_{t=t_0} \right).$$

- (b) En general, demuestra:

$$\left. \frac{d}{dt} \det L(t) \right|_{t=t_0} = \det L(t_0) \text{tr} \left( L(t_0)^{-1} \left. \frac{d}{dt} L(t) \right|_{t=t_0} \right)$$

*Sugerencia:* Aplica parte (a) al  $t \mapsto L(t_0)^{-1}L(t)$ .