Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Sistemas Dinámicos I (MAT-24210) **Primavera 2026**

Tarea 8 (e.d.o. lineal no-homogenea, variacion de constantes)

---

1. Hay unas formas particular de 2'da orden e.d.o. lineal que surgen como maneras común para normalizar la forma de estas e.d.o. Considere un e.d.o. de la forma:

$$(*) \quad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

   (a) Determina un re-escalamiento apropiado de tal ecuacion: $\lambda(x)y''+\lambda(x)a_1(x)y'+\lambda(x)a_0(x)y = \lambda(x)b(x)$, para que se convierte $(*)$ a la forma de Sturm-Liouville:

$$(\alpha_2(x)y')' + \alpha_0(x)y = \beta(x).$$

   (b) Determina un cambio de variable de la forma $X = f(x)$ que convierte $(*)$ a la forma:

$$\frac{d^2y}{dX^2} + F(X)y = G(X).$$

   (c) Determina un cambio de variable de la forma $Y = \mu(x)y$ que convierte $(*)$ a la forma:

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + \varphi(x)Y = \gamma(x).$$

   (d) Usar un cambio de variable apropiado para encontrar la solución general del e.d.o.

$$y'' + xy' + \left(\frac{x^2-2}{4}\right)y = 0$$

2. En este ejercicio vas a establecer un caso particular de una teorema de comparición de Sturm. Sea $y(x)$, $Y(x)$ dos soluciones a unos e.d.o.'s de la forma:

$$y'' + a(x)y = 0, \quad Y'' + A(x)Y = 0$$

con condiciones iniciales $y(0) = 0, y'(0) > 0$, y, $Y(0) = 0, Y'(0) > 0$, y donde las coeficientes de los e.d.o.'s satisfacen:

$$A(x) > a(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Suponer que existe algun $x_1 > 0$ que es el primer valor despues $x = 0$ en que $y(x_1) = 0$ (es decir $y(x) > 0$ para $x \in (0, x_1)$, y $y(x_1) = 0$). Demuestra que $y'(x_1) < 0$.

   En los siguientes partes, vamos a establecer que hay un otra zero de $Y(x)$ antes que x_1, es decir $Y(\xi) = 0$ algun $\xi \in (0, x_1)$.

   (b) Verifica que: $(y'Y - yY')' = (A - a)yY$.

   (c) Suponer, en busca de un contradiccion, que $Y(x) > 0$ para todos $x \in (0, x_1)$. Integrando de $x = 0$ á $x = x_1$ la ecuacion de parte (b), deduce que:

$$0 < \int_0^{x_1} (A(x) - a(x))y(x)Y(x)\ dx = y'(x_1)Y(x_1).$$

   (d) De parte (a), que $y'(x_1) < 0$, y parte (b), que $0 < y'(x_1)Y(x_1)$, deduce que $Y(x_1) < 0$. Por continuidad de $Y(x)$, deduce que $Y(x) < 0$ algunos $x \in (0, x_1)$ que es en contradicion con nuestro asumcion inicial $(Y(x) > 0, x \in (0, x_1))$ de parte (b). Concluir que necesariamente, $Y(\xi) = 0$ algun $\xi \in (0, x_1)$, como deseamos.

3. Usar la teorema de comparicion de Sturm del ejercicio anterior para demostrar que cualquier solución de
$$Y'' + (1 + x^2)Y = 0$$
con condicion inicial $Y(0) = 0$, tiene al menos un otro zero $Y(x_*) = 0$ para algún $x_* \in (0, \pi)$.

4. Suponer que $y_1(x), y_2(x)$ son dos soluciones independientes a algún e.d.o. lineal 2'da orden:
$$y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = 0.$$
Dado estos dos soluciones al e.d.o. homogenea, el método de variacion de constantes reduce encontrar solucion general al e.d.o. no-homogenea $y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$ a quadraturas (anti-derivadas), en usar la siguiente substiticion:

   (a) verifica que $y_p = f(x)y_1(x) + g(x)y_2(x)$ con $f'y_1 + g'y_2 = 0$ es una solucion particular del e.d.o. no-homogenea, $y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$, cuando:
$$f' = \frac{\gamma y_2}{y_1'y_2 - y_1y_2'}, \quad g' = \frac{\gamma y_1}{y_1y_2' - y_1'y_2}.$$

   (b) Encuentra la solucion general de:
$$y'' - y = e^x.$$

5. Consider el siguiente e.d.o. no homogenea:
$$y'' + y = 2A\cos x$$
que depende por un parametro $A \in \mathbb{R}$.

   (a) Cuantos soluciones satisface $y(0) = 0$, y, $y(\pi/2) = 0$?
   (b) Cuantos soluciones satisfiace $y(0) = 0$, y, $y(\pi) = 0$?
   (c) Cuantos soluciones satisface $y(0) = 0$, y, $y(\pi) = 1$?
   (d) Cuantos soluciones satisfaces $y'(0) = 0$, y, $y'(\pi) = 1$?

6. Determina la solucion general de la ecuación diferencial
$$y'' - 4y' + 3y = \sin x.$$

7. Determina la solucion general al siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden:
$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x, \quad x > 0.$$
Comentario: El parte homogenea de este e.d.o. esta uno del tipo Cauchy-Euler.

8. En este ejercicio delineamos un truco de Lagrange para resolver para las órbitas del 'problema de Kepler'. Considera la sistema de e.d.o. en el plano $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$:

$$(*) \qquad x'' = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad y'' = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

   (a) Considera un cambio a coordenadas polares, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, verifica que el sistema $(*)$ transforma al sistema:

$$r'' = \frac{r^3(\theta')^2 - 1}{r^2}, \quad r\theta'' + 2r'\theta' = 0.$$

   (b) Escalando la 2'da ecuacion del parte (a) por r, deduce que tenemos:

$$(r^2\theta')' = 0$$

   es decir $r^2\theta' = C$ es constante (el momento angular).

   (c) Substituyendo el constante $C = r^2\theta'$ del parte (b) en el 1'er ecuacion de parte (a), deduce que tenemos:

$$r'' = \frac{C^2 - r}{r^3}.$$

   (d) Ahora considera algún solucion $x(t), y(t)$ de $(*)$ y pon $r(t) := \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. Entonces $x(t), y(t)$ son dos soluciones del sistema lineal no-autonoma:

$$\xi'' = -\frac{\xi}{r(t)^3}$$

   mientras $r(t)$ es una solucion particular del sistema lineal no-autonoma y no-homogenea:

$$(**) \qquad \xi'' = \frac{C^2}{r(t)^3} - \frac{\xi}{r(t)^3}$$

   para alguna constante $C \in \mathbb{R}$. Notando que $(**)$ tambien tiene solucion particular: $\xi_p(t) = C^2 = cst.$, deduce que:

$$r(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) + C^2$$

   para algunos constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (la ecuacion $r = \sqrt{x^2+y^2} = \alpha x + \beta y + C^2$ es una forma para la ecuacion de secion cónica con foco por el origen).

9. Considera un ecuacion particular de Mathieu de la forma:

$$(*) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + (1 + \varepsilon\cos(2t))y = 0$$

   donde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ es un parametro. Usa el método de series para encontrar una expansion en ε al orden 1 de:

$$y(\pi) = y_0(\pi) + \varepsilon y_1(\pi) + O(\varepsilon^2)$$

   donde $y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \ldots$ es una solucion al $(*)$ con condition iniciales $y(0) = 0, y'(0) = 1$ (entonces $y_0(0) = 0, y_0'(0) = 1$, y, $y_k(0) = y_k'(0) = 0$ para $k \geq 1$).

   Comentario: Usando este método, F. Tisserand ($\approx$ 1894) calcula una expansion de los propios valores asociado a ecuaciones como $(*)$ que controlan la estabilidad de tal ecuacion (para valores de $\varepsilon > 0$ suficiamente pequeno). Tales expansiones son util, por ejemplo, en describir más preciso los movimientos de la Luna.