

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Sistemas Dinámicos I (MAT-24210)

Primavera 2026

Tarea 9 (variación de constantes: e.d.o. lineal no-homogénea, repaso para examen 2)

1. Determinar las soluciones de los siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y'' - 3y' + 2y = \sin 5t$,

(b) $y'' + y' = 3e^{t/2}$, con valores iniciales: $y(0) = 4, y'(0) = 3$,

(c) $y'' + y = \cos x$, con valores de frontera $y(0) = 0, y(\pi/2) = 0$, y $\int_0^{\pi/2} y dx = -1/2$,

(d) $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^4$, ($x > 0$),

(e) $x^3 y''' + 5x^2 y'' + 3xy' = x^2$, ($x > 0$).

2. Utilizar el método de variación de parámetros para resolver los sistemas:

(a) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. ¿Es posible que cada solución, $y(x)$, del e.d.o.:

$$y'' = xy' + f(x)y$$

tiene $y(x) \rightarrow 0, y'(x) \rightarrow 0$ mientras $x \rightarrow \infty$?

Sugerencia: Considere el Wronskiano de dos soluciones (independientes) del sistema.

4. Considere la siguiente ecuación diferencial parcial (ecuación de ondas 1-dimensional):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Haciendo el hipótesis que alguna solución es de la forma particular:

$$u(x, t) = f(x)g(t),$$

encuentra las soluciones de esta forma que tienen $f(x + 2\pi) = f(x)$ periódico de período 2π .

5. Considere la ecuación diferencial de Bessel (que depende por un parámetro $n \in \mathbb{N}$):

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad (x > 0)$$

(a) Determina un cambio de variable de la forma $y = \mu(x)Y$ que transforma la e.d.o. de Bessel al:

$$(*) \quad Y'' + \left(1 + \frac{1 - 4n^2}{x^2}\right) Y = 0, \quad (x > 0).$$

(b) Sea $Y(x)$ una solución del ecuación de Bessel definido para todos $x > 0$, y con condiciones iniciales $Y(2n) = 0, Y'(2n) > 0$. Demuestra que $Y(x)$ tiene infinitos ceros.

Sugerencia: Usa el teorema de comparación de Sturm (#2 de la tarea anterior), con $a(x) = \frac{1}{4n^2} \leq 1 + \frac{1-4n^2}{x^2} = A(x)$ para $x \geq 2n$ (usando la notación como #2 de la tarea anterior).

RESUMEN DE TEMAS:

La tema general del 2' da parte ha sido las sistemas de ecuaciones diferenciales (y tambien e.d.o. de más alta orden) que son *lineal* (\approx ch. 3, 4, 7 de Boyce-DiPrima).

- SISTEMAS AUTONOMA: tenemos sistemas de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

donde $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformacion lineal fijo (matrix $n \times n$ con coeficientes constantes). Estos sistemas resolvemos en analizar los propios valores/proprios vectores de A para encontrar un base de soluciones cuyos combinacione lineales generan las soluciones general:

- valor propio real $\lambda \in \mathbb{R}$, con vector propio real $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ genera un solución $e^{\lambda t}\vec{v}$,
- valor propio compleja $\lambda_{\pm} = a \pm ib \in \mathbb{C}$ (con $b \neq 0$) y vector propio $\vec{V}_{\pm} \in \mathbb{C}^n$: $A\vec{V}_{\pm} = \lambda_{\pm}\vec{V}_{\pm}$, genera soluciones $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}^n$ por partes real/imaginaria de:

$$e^{\lambda+t}\vec{V}_+ = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)(\vec{u} + i\vec{v}) = \overbrace{e^{at}(\cos bt \vec{u} - \sin bt \vec{v})}^{\mathbf{x}_1(t)} + i \overbrace{e^{at}(\sin bt \vec{u} + \cos bt \vec{v})}^{\mathbf{x}_2(t)}$$

donde escribimos $\vec{V} = \vec{u} + i\vec{v}$ en partes real/imaginaria con $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

- valor propio λ repetida, dependiendo del multiplicidad, determina vectores propios generalizados:

$$(A - \lambda Id)\vec{v}_1 = 0, \quad (A - \lambda Id)^2\vec{v}_2 = 0, \quad (A - \lambda Id)^3\vec{v}_3 = 0, \dots$$

que generan soluciones de la forma $e^{\lambda t}\vec{v}_1, e^{\lambda t}(t\vec{v}_1 + \vec{v}_2), e^{\lambda t}(t^2\vec{v}_1 + t\vec{v}_2 + \vec{v}_3), \dots$ (en caso que $A\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_2 + \vec{v}_1, A\vec{v}_3 = \lambda\vec{v}_3 + \vec{v}_2$).

Generalmente enfocamos en los casos de sistemas en \mathbb{R}^2 , o, \mathbb{R}^3 .

- E.D.O. ORDEN n AUTONOMA: para salvar tiempo es importante resumir los resultados que obtenemos despues traducir e.d.o. lineal orden n con coeficientes, $a_j \in \mathbb{R}$, constantes a ciertos sistemas lineales autonomas correspondientes:

$$(*) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

es equivalente al sistema lineal autonoma:
$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

y encontramos soluciones mas eficiente en recordar:

- el polinomio caracteristico asociado a (*) (con raizes los valores propios) determinamos en substituir $y = e^{\lambda x}$ que conduce directamente de (*) a:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

- un valor propio real $\lambda \in \mathbb{R}$ conduce al solucion particular: $e^{\lambda x}$.
- un valor propio compleja $\lambda = a \pm ib \in \mathbb{C}$ (con $b \neq 0$) conduce a dos soluciones particular: $e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx$.
- un valor propio real, $\lambda \in \mathbb{R}$, repetida de multiplicidad $k+1$ conduce al soluciones particular: $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^k e^{\lambda x}$
- un valor compleja, $\lambda = a \pm ib \in \mathbb{C}$, repetida de multiplicidad $k+1$ conduce al soluciones: $e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx, xe^{ax} \cos bx, xe^{ax} \sin bx, \dots, x^k e^{ax} \cos bx, x^k e^{ax} \sin bx$ (este caso casi no hemos visto porque requiere orden al menos 4).

Generalmente enfocamos en los casos de 2' da orden, o 3'er orden.

- CASO NO-AUTONOMA: sistemas no-autonoma, o e.d.o. orden n con coeficientes no constantes:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

con $A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformacion lineal cada t (matriz $n \times n$ con entradas que dependen por t), y similar:

$$(**) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

son generalmente no posible resolver explicitamente (sin usar método de series). La única tecnica general es substituciones (cambios de variable). En particular hemos visto las siguientes casos especial:

- tipo Cauchy-Euler: cuando tenemos la forma particular

$$(C - E) \quad x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

para $a_j \in \mathbb{R}$ algunos constantes. Siempre la substitucion $x = e^t$ convierte $(C - E)$ a algun e.d.o. lineal con coeficientes constantes (que tenemos tecnicas general para resolver). Es importante notar que transformar el e.d.o. no es necesario, ya que sabemos la substitucion $y = e^{\lambda t} = x^\lambda$ conduce al polinomio caracteristica, podemos encontrar el polinomio caracteristica (para λ) de $(C - E)$ en substituir:

$$y = x^\lambda.$$

- reduccion de orden: en caso sabemos algún solucion particular $y_p(x) \neq 0$ de (**), la substitucion $y(x) = u(x)y_p(x)$ siempre reduce (**) a algún e.d.o. lineal de orden $n - 1$ para $v = u'$.

Tambien vimos un poco de la teoría general, donde lo más general principio se trata con el Wronskiano (determinante del flujo):

- Para $t \mapsto \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t) \in \mathbb{R}^n$ soluciones de algún sistema lineal ($\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) su Wronskiano:

$$W(t) = \det(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t))$$

$$\text{satisface } \frac{dW}{dt} = \text{tr}(A(t))W.$$

Notar: en convertir un e.d.o. lineal orden n (como (**)) al sistema lineal corespondiente, la Wronskiano de algunos soluciones particular $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ del e.d.o. orden n seria:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

$$\text{que satisface } \frac{dW}{dx} = -a_{n-1}(x)W.$$

- CASO NO-HOMOGENEA (VARIACIÓN DE CONSTANTES): al final vimos método de variación de constantes para sistemas de la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

con $A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ algunas transformaciones lineal, y $t \mapsto \mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$, y similarmente para e.d.o. orden n de la forma:

$$(***) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x).$$

El método en esta situación consiste en decir si conocemos la solución general, $c_1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t)$ con $c_j \in \mathbb{R}$ constantes, al sistema homogénea ($\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}$) que buscamos solución al sistema no-homogéneo en permitir las coeficientes $c_j(t)$ depender de t y resulta que tales funciones deben satisfacer:

$$c'_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c'_n \mathbf{x}_n = \mathbf{b}.$$

En el caso de e.d.o. orden n este método traduce a cuando conocemos n soluciones independientes $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ del parte homogénea ($\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$) obtenemos soluciones $c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$ al e.d.o. no homogénea (***) en buscar $c_j(x)$ resolviendo los siguientes e.d.o. 1'er orden:

$$c'_1 y_1 + \dots + c'_n y_n = 0,$$

$$c'_1 y'_1 + \dots + c'_n y'_n = 0,$$

...

$$c'_1 y_1^{(n-2)} + \dots + c'_n y_n^{(n-2)} = 0,$$

$$c'_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c'_n y_n^{(n-1)} = f(x)$$

que después de hacer la eliminación algebraica reduce a calcular un serie de anti-derivadas para determinar las funciones $c_j(x)$.