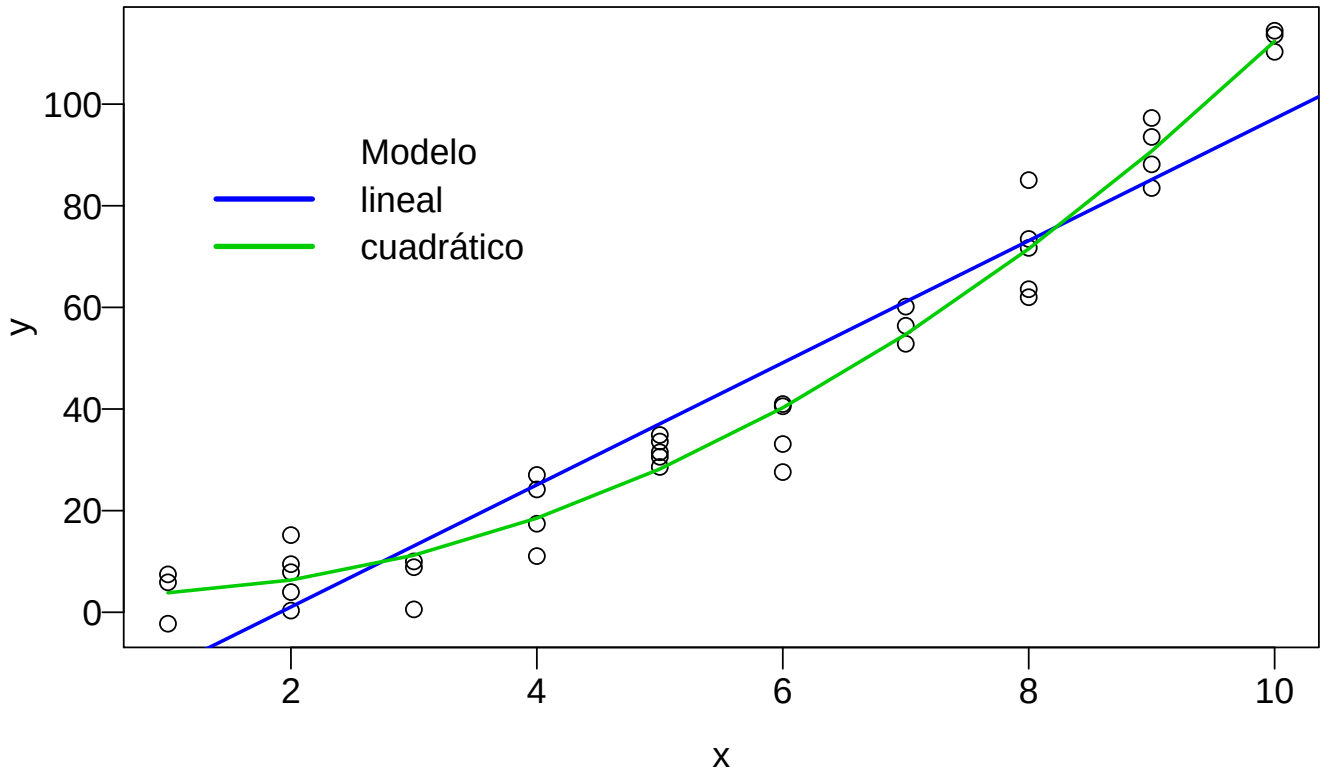
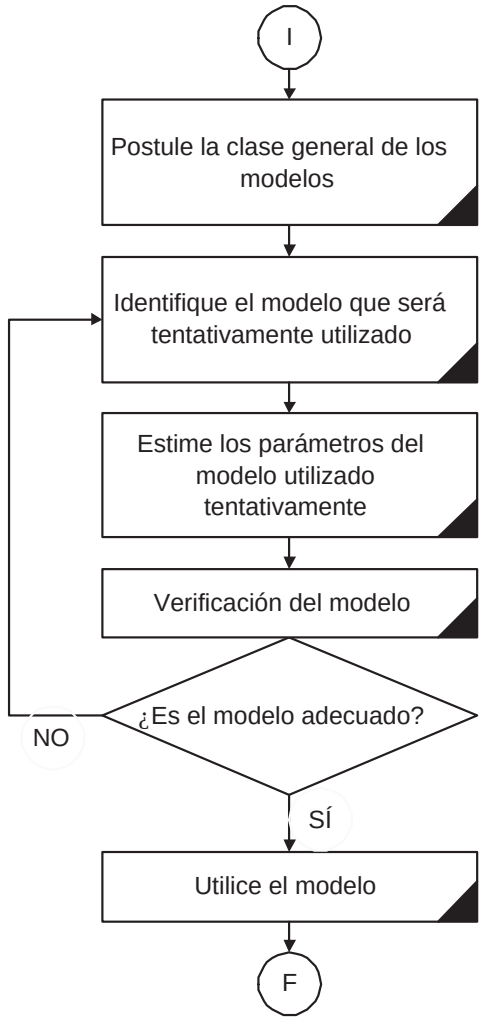
3 - RLS – Residuales



–ebz

Contenido

Modelación Estadística[1]



[1] Box and Jenkins (1970), p19.

Modelo de regresión lineal simple

Modelo

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

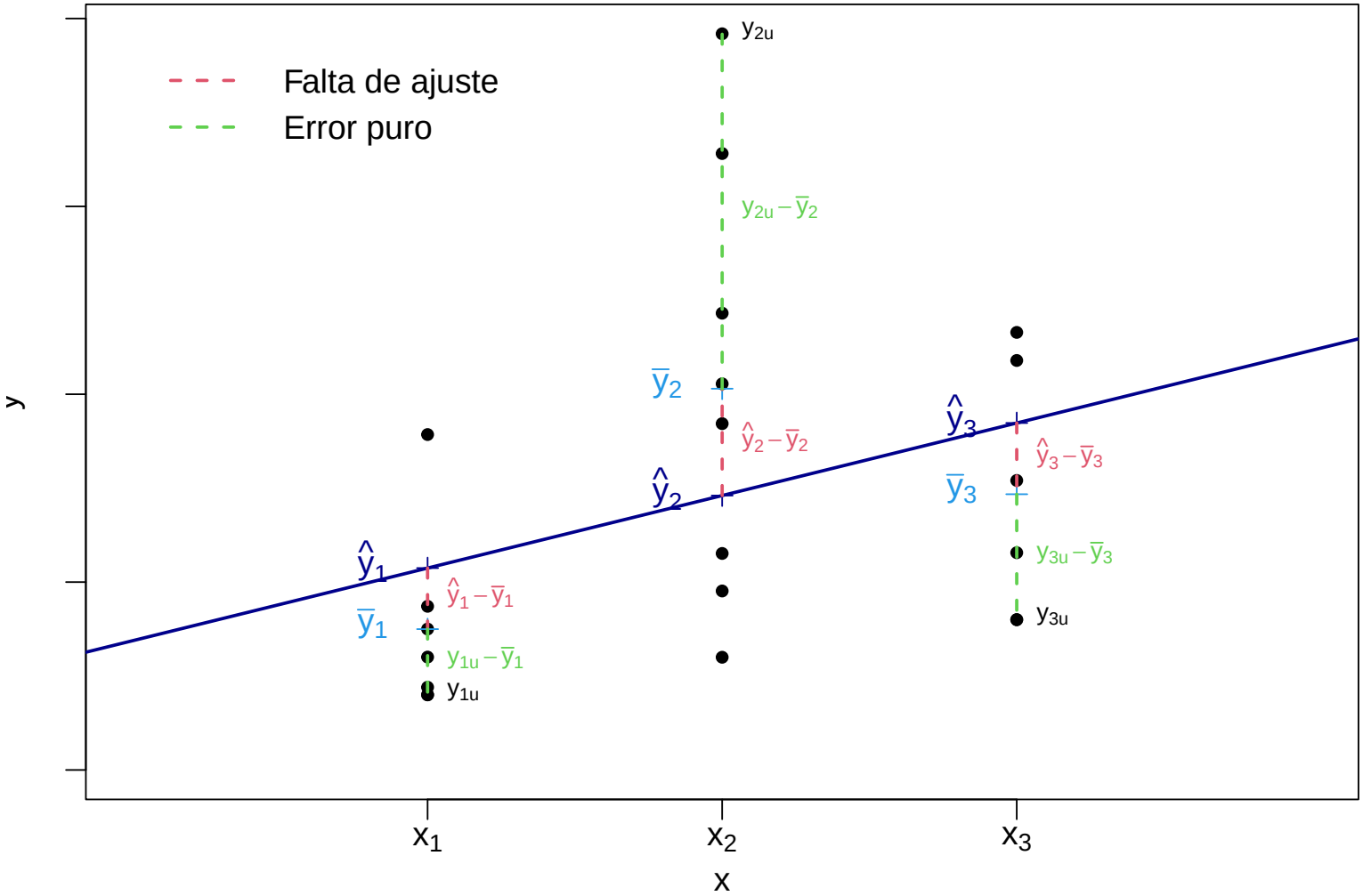
Supuestos

$$\epsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2) \quad \textit{i.i.d.}$$

Residuales

- Modelo Correcto: Bondad (falta) de ajuste
- Análisis de Residuales
  - Correlación
  - Varianza constante
  - Normalidad

Modelo Correcto: Error Puro y Falta de Ajuste



–ebz

Considere los datos:

$$y_{iu}; \qquad u = 1, \ldots, n_i; \; i = 1, \ldots, m$$

la u-ésima observación de la respuesta al nivel $X = x_i$. Hay en total $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$ observaciones.

⋆ La *Suma de cuadrados debida al error puro*:

$$\text{SC}_{\text{Error Puro}} = \text{SC}_{\text{EP}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{u=1}^{n_i} (y_{iu} - \bar{y}_{i\cdot})^2$$

donde $\bar{y}_{i\cdot} = \frac{1}{n_i} \sum_{u=1}^{n_i} y_{iu}$ es la respuesta promedio al nivel $X = x_i$. La suma tiene asociada $\sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) = n - m$ grados de libertad.

⋆ El *Cuadrado medio debido al error puro*:

$$\text{CM}_{\text{EP}} = \text{SC}_{\text{EP}}/n - m$$

es un estimador de σ^2, independientemente del modelo.

Note que SC_{EP} es parte de la SC_{Resid} pues

$$\begin{array}{ccccc} (y_{iu} - \hat{y}_i) & = & (y_{iu} - \bar{y}_{i\cdot}) & + & (\bar{y}_{i\cdot} - \hat{y}_i) \\ \text{Residual} & = & \text{Error Puro} & + & \text{Falta de Ajuste} \end{array}$$

–ebz

Error Puro y Falta de Ajuste

En la presencia de réplicas puras la *Suma de cuadrados de los residuales* se puede descomponer como

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{i=1}^{m}\sum_{u=1}^{n_i}(y_{iu}-\hat{y}_i)^2 & = & \sum_{i=1}^{m}\sum_{u=1}^{n_i}(y_{iu}-\bar{y}_{i\cdot})^2 & + & \sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{y}_{i\cdot}-\hat{y}_i)^2 \\ \mathrm{SC}_{\text{Residuales}} & = & \mathrm{SC}_{\text{Error Puro}} & + & \mathrm{SC}_{\text{Falta de Ajuste}} \\ \text{grados de libertad} & & & & \\ (n-2) & = & (n-m) & + & (m-2) \end{array}$$

Bajo los supuestos del modelo, $\mathrm{CM}_{\mathrm{EP}} = \mathrm{SC}_{\mathrm{EP}}/(n-m)$ y $\mathrm{CM}_{\mathrm{FA}} = \mathrm{SC}_{\mathrm{FA}}/m-2$ son estimaciones independientes de σ^2 y su cociente sería aproximadamente 1. De hecho, bajo los supuestos del modelo:

$$\hat{F} = \frac{\mathrm{CM}_{\mathrm{FA}}}{\mathrm{CM}_{\mathrm{EP}}} \sim F_{(m-2,n-m)}$$

Entonces, si

$$\hat{F} > F_{(1-\alpha;m-2,n-m)} \quad \text{entonces} \quad \textit{“El modelo no es correcto”}$$

–ebz

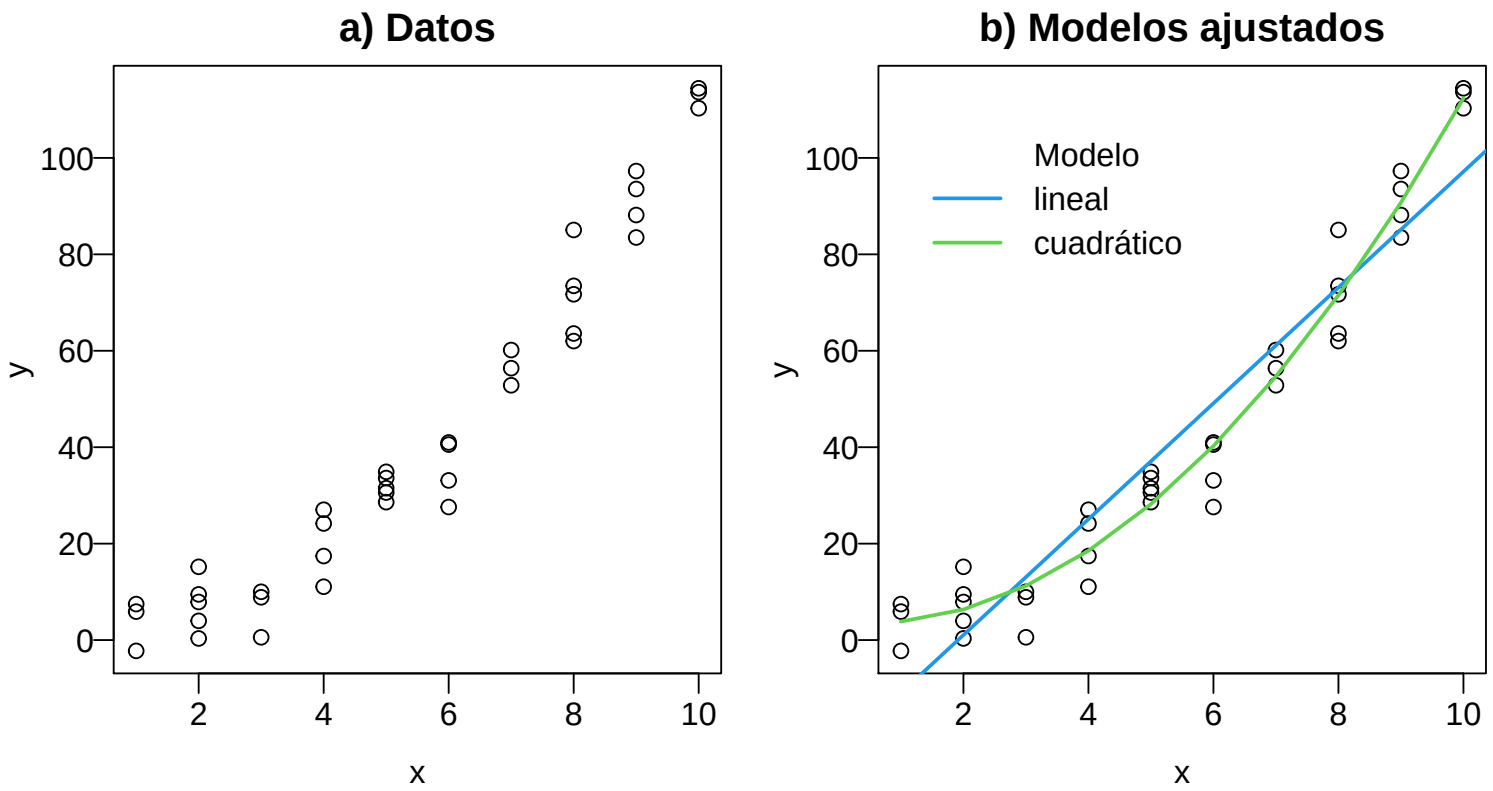
Ejemplo Simulado

Datos:

i	x_i	y_i	$\bar{y}_i$	$\hat{y}_{1i}$	$\hat{y}_{2i}$	i	x_i	y_i	$\bar{y}_i$	$\hat{y}_{1i}$	$\hat{y}_{2i}$
1	1	−2.25	3.71	−10.96	3.84	21	6	33.11	35.56	49.10	40.25
2	1	7.46	3.71	−10.96	3.84	22	6	27.60	35.56	49.10	40.25
3	1	5.90	3.71	−10.96	3.84	23	6	40.54	35.56	49.10	40.25
4	2	0.34	7.38	1.05	6.34	24	6	40.98	35.56	49.10	40.25
5	2	15.19	7.38	1.05	6.34	25	7	56.39	56.46	61.11	54.69
6	2	3.98	7.38	1.05	6.34	26	7	60.16	56.46	61.11	54.69
7	2	9.47	7.38	1.05	6.34	27	7	52.84	56.46	61.11	54.69
8	2	7.90	7.38	1.05	6.34	28	8	62.01	71.17	73.13	71.52
9	3	10.01	6.49	13.06	11.24	29	8	73.47	71.17	73.13	71.52
10	3	0.57	6.49	13.06	11.24	30	8	85.05	71.17	73.13	71.52
11	3	8.87	6.49	13.06	11.24	31	8	63.58	71.17	73.13	71.52
12	4	11.06	19.93	25.08	18.52	32	8	71.72	71.17	73.13	71.52
13	4	24.18	19.93	25.08	18.52	33	9	93.55	90.62	85.14	90.75
14	4	27.03	19.93	25.08	18.52	34	9	97.28	90.62	85.14	90.75
15	4	17.43	19.93	25.08	18.52	35	9	83.49	90.62	85.14	90.75
16	5	30.60	31.84	37.09	28.19	36	9	88.16	90.62	85.14	90.75
17	5	34.89	31.84	37.09	28.19	37	10	110.30	112.79	97.15	112.36
18	5	31.50	31.84	37.09	28.19	38	10	113.64	112.79	97.15	112.36
19	5	28.60	31.84	37.09	28.19	39	10	114.44	112.79	97.15	112.36
20	5	33.60	31.84	37.09	28.19						

donde x_i es el nivel del regresor; y_i la respuesta observada; $\bar{y}_i$ la respuesta media observada; $\hat{y}_{1i}$ la respuesta media ajustada por el modelo 1; y $\hat{y}_{2i}$ la respuesta media ajustada por el modelo 2.

Ejemplo Simulado (cont.)



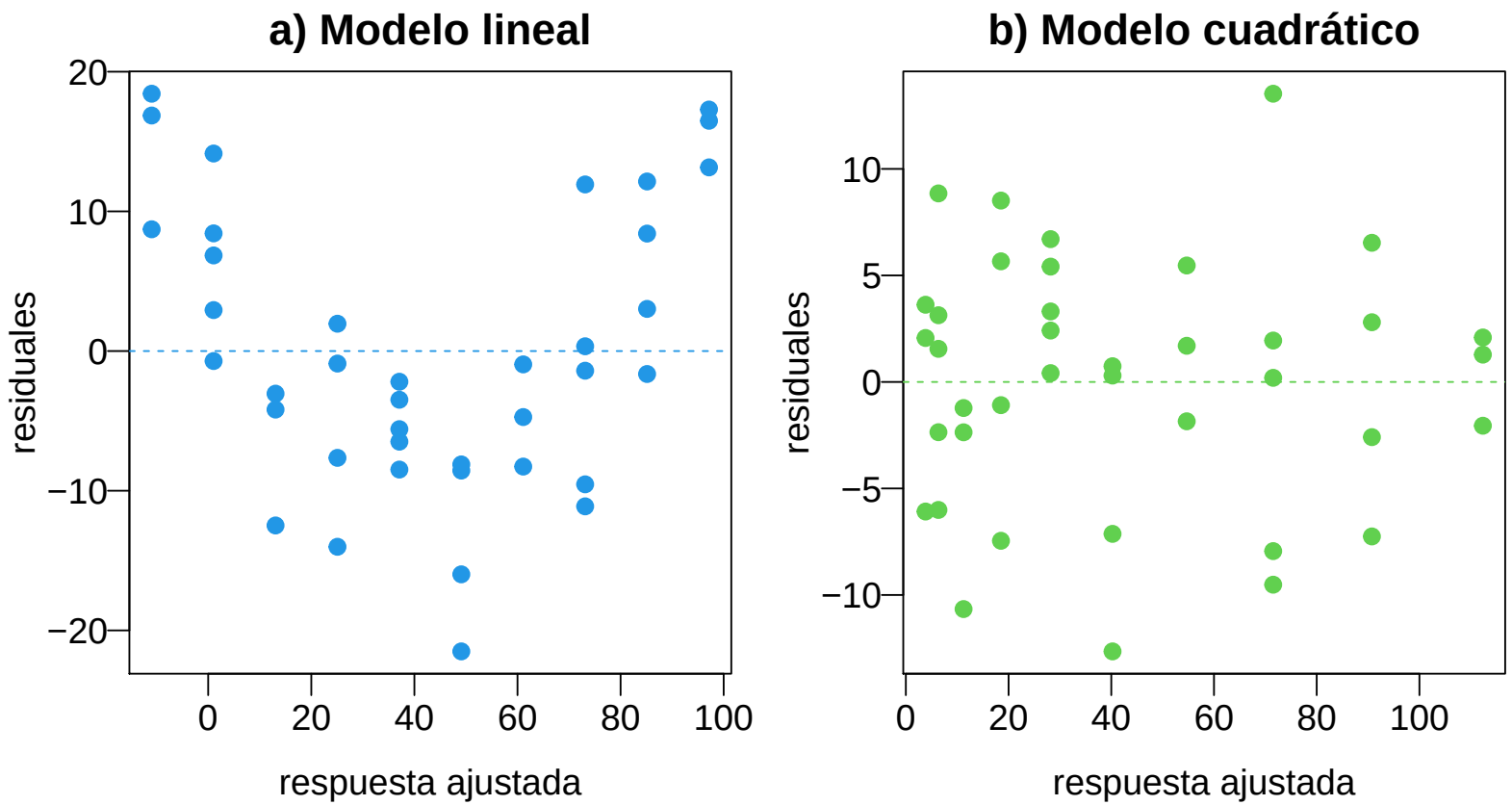
Ejemplo Simulado (cont.)

Ajuste modelo lineal

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -22.975      3.652  -6.292 2.53e-07
x             12.013      0.594  20.224  < 2e-16

Residual standard error: 10.28 on 37 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.917,      Adjusted R-squared: 0.9148
F-statistic:   409 on 1 and 37 DF,  p-value: < 2.2e-16

Analysis of Variance Table
Response: y
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
x          1  43255   43255  409.02 < 2.2e-16
Residuals 37   3913     106

       SCRes          SCEP          SCFA             F             p
3.912829e+03 1.021897e+03 2.890932e+03 1.025507e+01 2.090028e-06
```

Ejemplo Simulado (cont.)

Análisis de Residuales



−ebz

Ejemplo Simulado (cont.)

Ajuste modelo cuadrático

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   3.7195     3.7326   0.996    0.326
x            -1.0763     1.5490  -0.695    0.492
x2            1.1940     0.1378   8.665 2.47e-10

Residual standard error: 5.935 on 36 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9731,     Adjusted R-squared: 0.9716
F-statistic: 651.5 on 2 and 36 DF,  p-value: < 2.2e-16

Analysis of Variance Table
Response: y
          Df Sum Sq Mean Sq  F value    Pr(>F)
x          1  43255   43255 1227.983 < 2.2e-16
x2         1   2645    2645   75.084 2.467e-10
Residuals 36   1268      35

       SCRes          SCEP          SCFA             F             p
1268.0666396 1021.8971671  246.1694725    0.8732428    0.5390620
```

Error Puro y Falta de Ajuste

$$\eta_i = \mathbb{E}[y_i] = \mathbb{E}[y|x = x_i]$$

es el valor esperado de la respuesta y al nivel del regresor $x = x_i$. Y sea

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

el valor ajustado del modelo al mismo nivel.

$$\begin{aligned} \hat{e}_i = (y_i - \hat{y}_i) &= (y_i - \hat{y}_i) - \mathbb{E}[y_i - \hat{y}_i] + \mathbb{E}[y_i - \hat{y}_i] \\ &= \underbrace{[(y_i - \hat{y}_i) - (\eta_i - \mathbb{E}[\hat{y}_i])]}_{q_i} + \underbrace{(\eta_i - \mathbb{E}[\hat{y}_i])}_{b_i} \end{aligned}$$

donde b_i es el *sesgo al nivel* $x = x_i$.

- Si el modelo es correcto $\mathbb{E}[\hat{y}_i] = \eta_i \Longrightarrow b_i = 0$
- Por otro lado, $\mathbb{E}[q_i] = 0$ *independientemente* del modelo.
- Se puede mostrar que los q_i son correlacionados y $\mathbb{E}[\sum q_i] = (n-2)\sigma^2$. De donde,

$$\mathbb{E}[s^2] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n-2}\sum(y_i - \hat{y}_i)^2\right] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si el modelo es correcto} \\ \sigma^2 + \frac{1}{n-2}\sum b_i^2 & \text{si el modelo } \textbf{no} \text{ es correcto} \end{cases}$$

–ebz

Análisis de Residuales

Mediante los residuales se intenta verificar si los supuestos del modelo se satisfacen.

Supuestos

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\epsilon \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2), \quad \textit{v.a.i.i.d.}$$

$$\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)$$

- Los residuales son “errores observados” *si el modelo es correcto*. Pero por las ecuaciones normales se tiene dependencia entre ellos.
- *¿Sugieren los residuales que los supuestos no se satisfacen?*
- Análisis más sofisticados: pruebas estadísticas formales.
- Definición de otros residuales.

Análisis de Residuales

Varianza constante

- Prueba de *Barttlet*, prueba de *Levene*.
- Prueba de *Breusch y Pagan*, prueba de *White*.
- ⋆ Gráficas de residuales: ($\hat{e}_i$ *vs.* $\hat{y}_i$); ($\hat{e}_i$ *vs.* i); ($\hat{e}_i$ *vs.* $x_{j\,i}$).
- ($\hat{e}_i$ *vs.* y_i) no se grafican por estar correlacionados.

Correlación

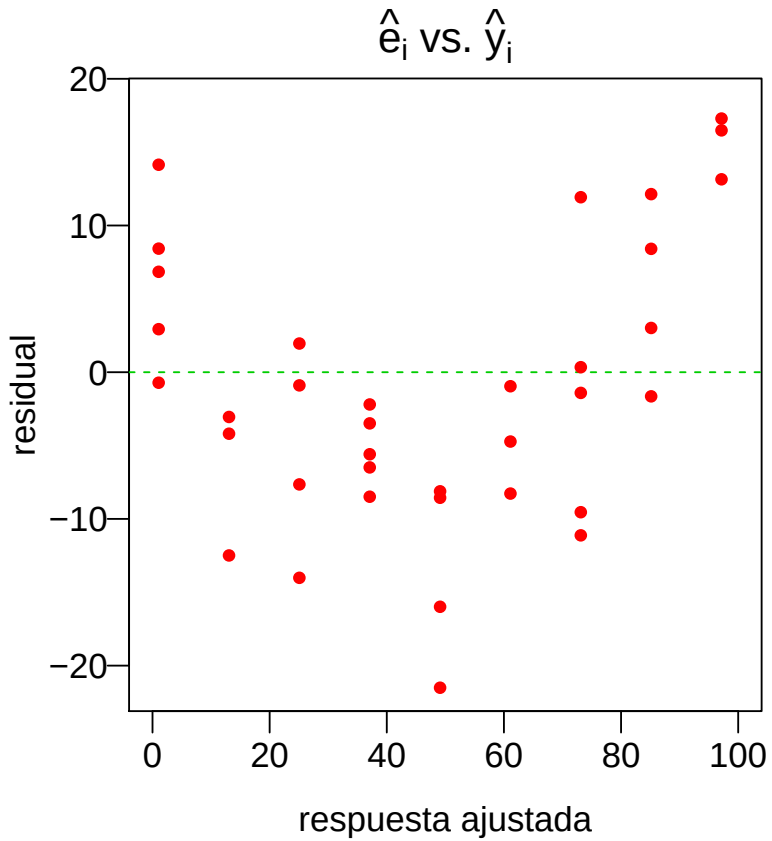
- Significancia de la autocorrelación de residuales $\hat{e}_\ell$.
- Correlogramas.
- Prueba de *Durbin-Watson*.
- ⋆ Gráficas de residuales: ($\hat{e}_{i-1}$ *vs.* $\hat{e}_i$).

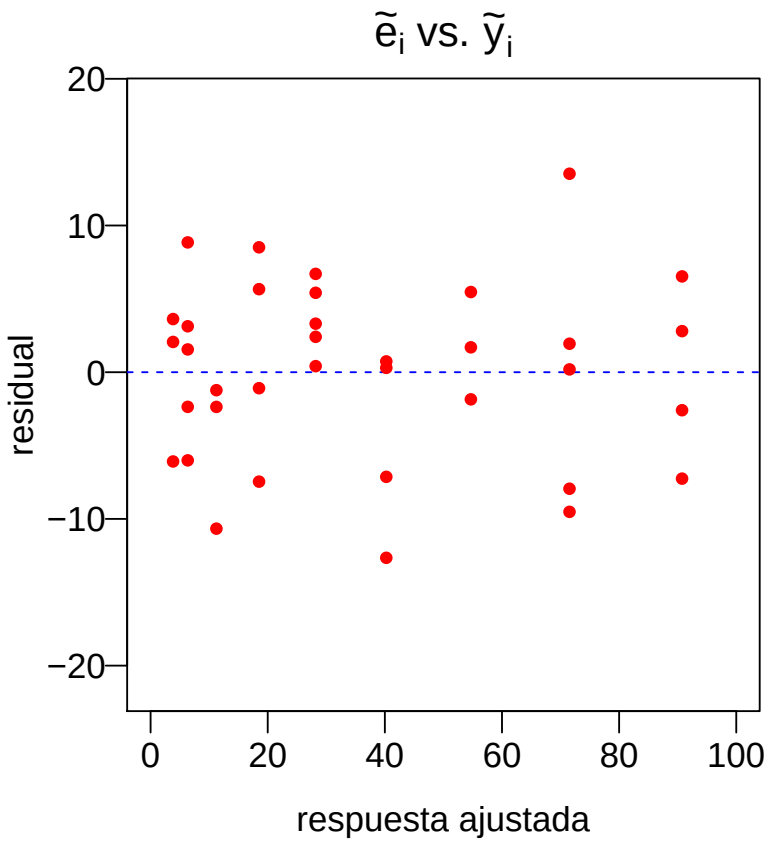
Normalidad

- Pruebas de Bondad de Ajuste: χ^2; *Kolmogorov-Smirnov*; *Anderson-Darling*; *Jarque-Bera*, *Cramér-Von Mises*, *Lilliefors*, etc.
- ⋆ Gráficas de residuales $\hat{e}$ en *papel de probabilidad normal (cuantil-cuantil normal)*.

–ebz

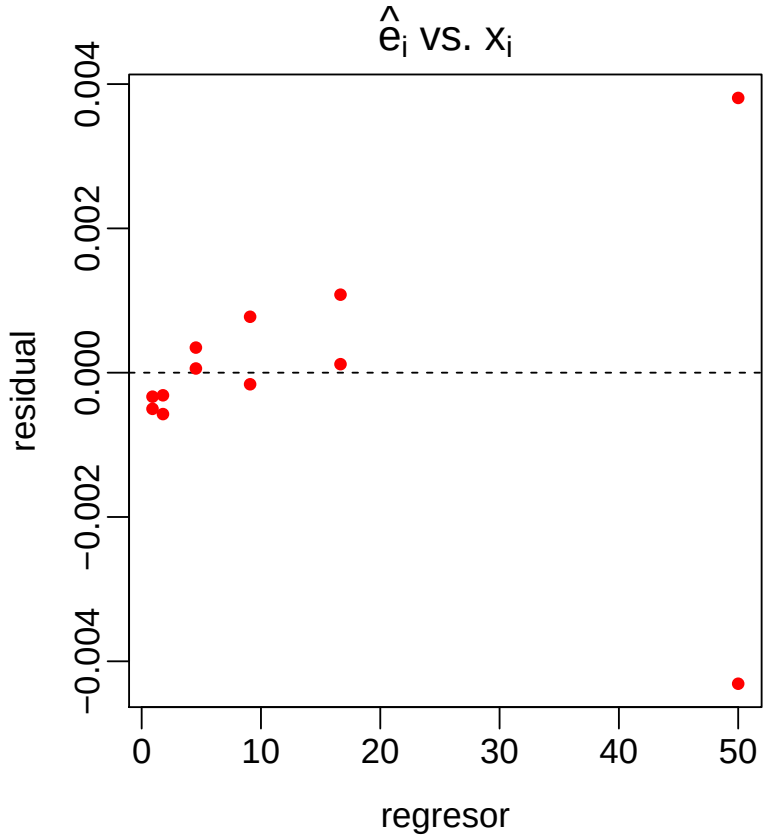
Varianza constante

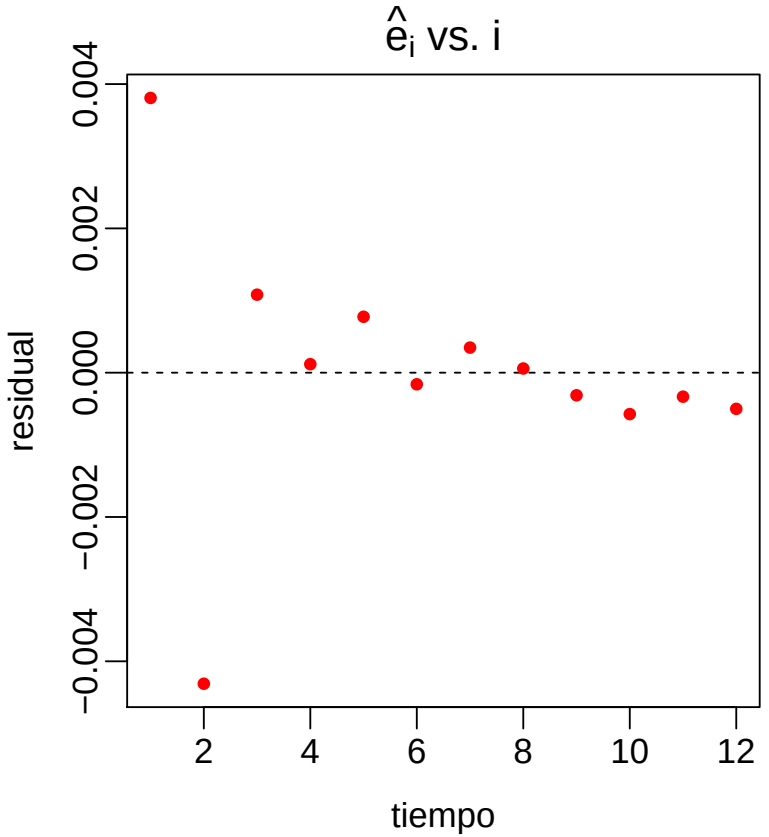




−ebz

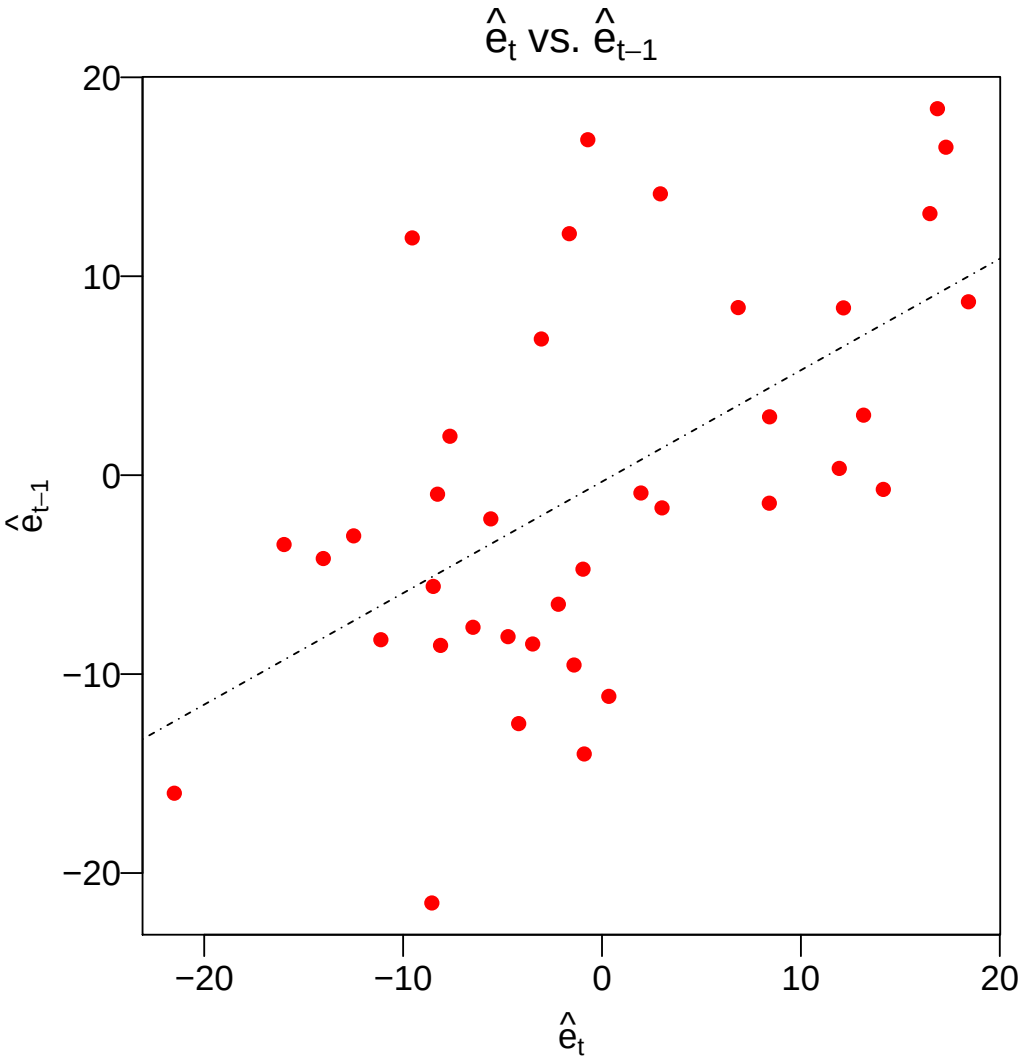
Varianza constante



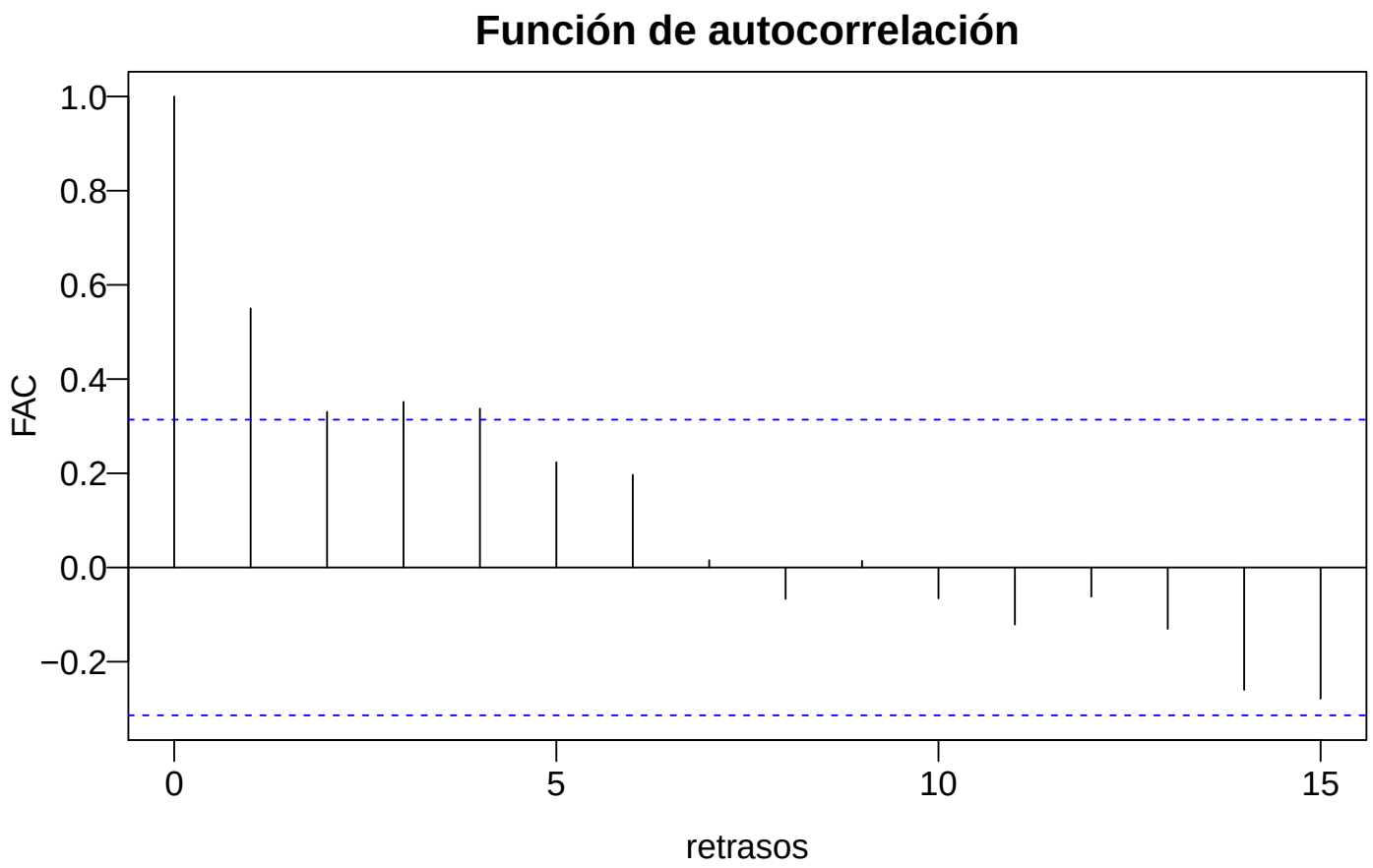


−ebz

Autocorrelación

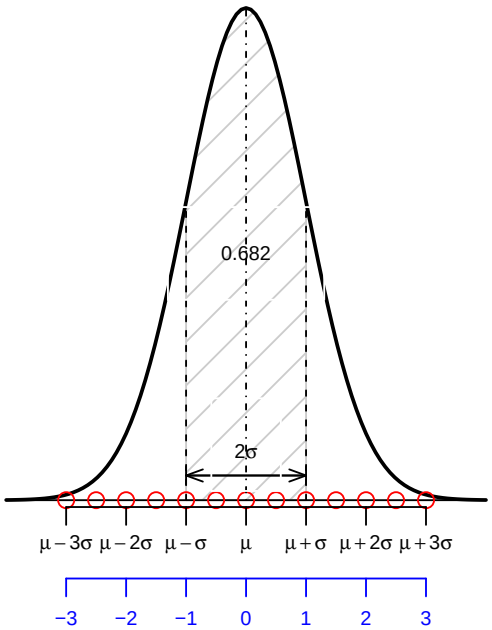


Autocorrelación

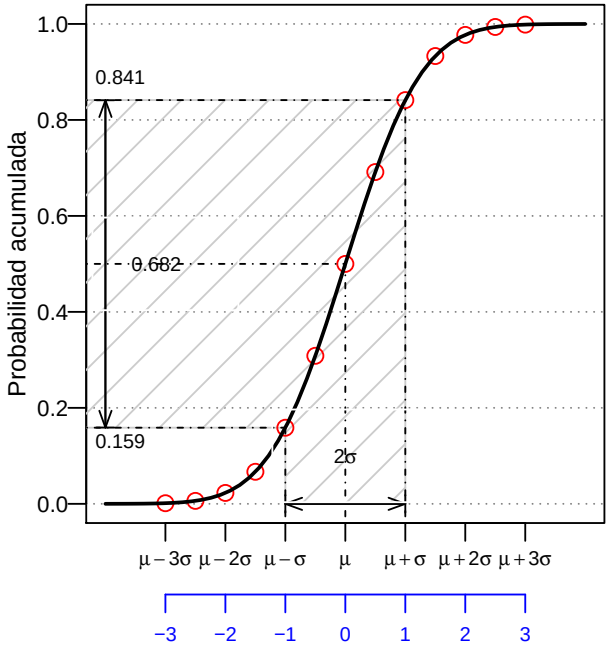


Gráfica cuantil-cuantil normal

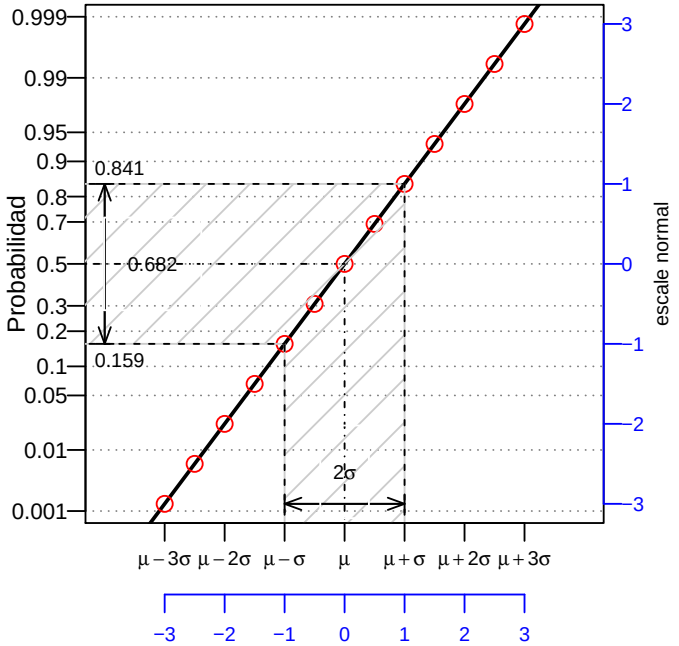
Función de densidad



Función de distribución



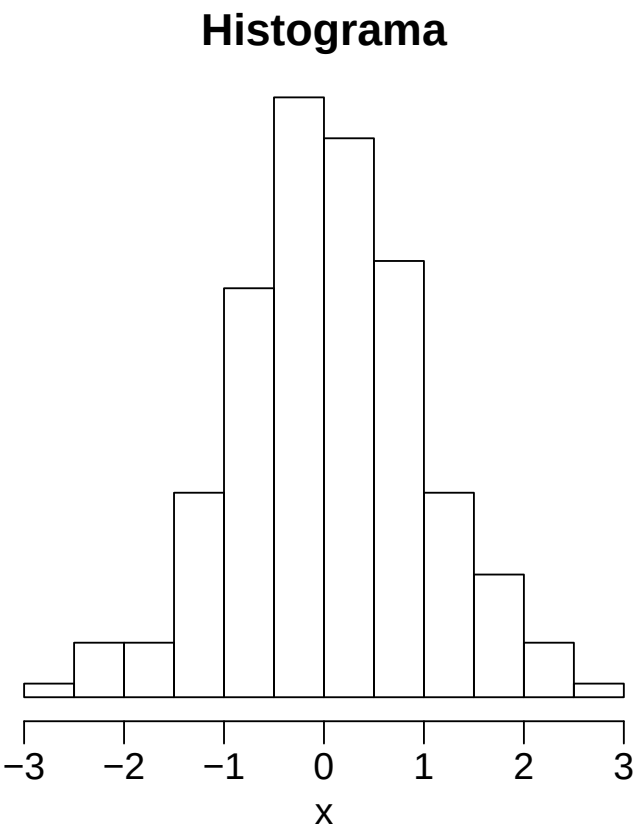
Gráfica cuantil−cuantil

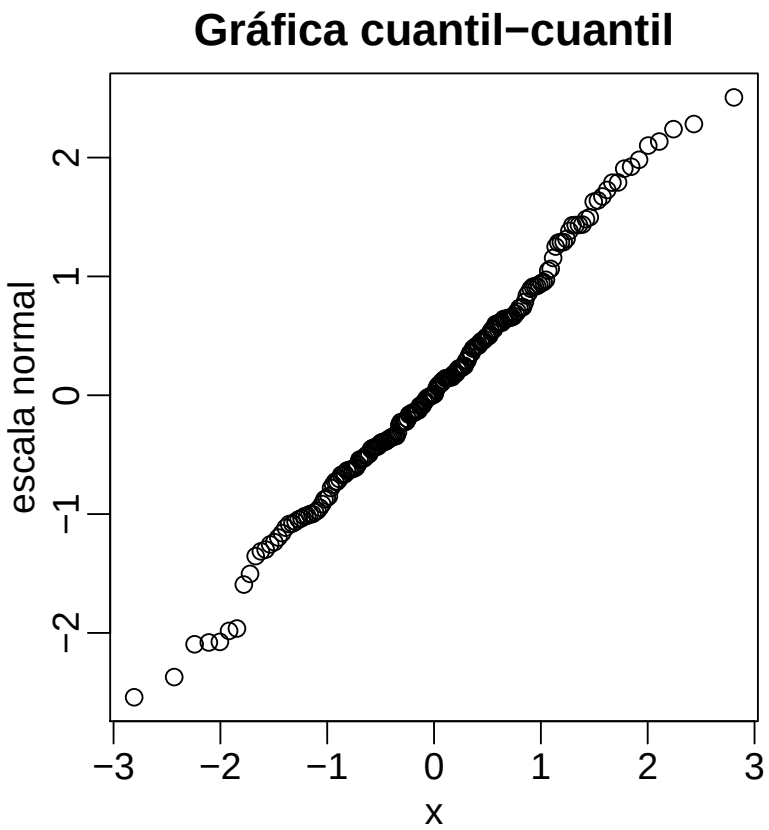


−ebz

Normalidad

Ejemplo simulado: 200 observaciones normales

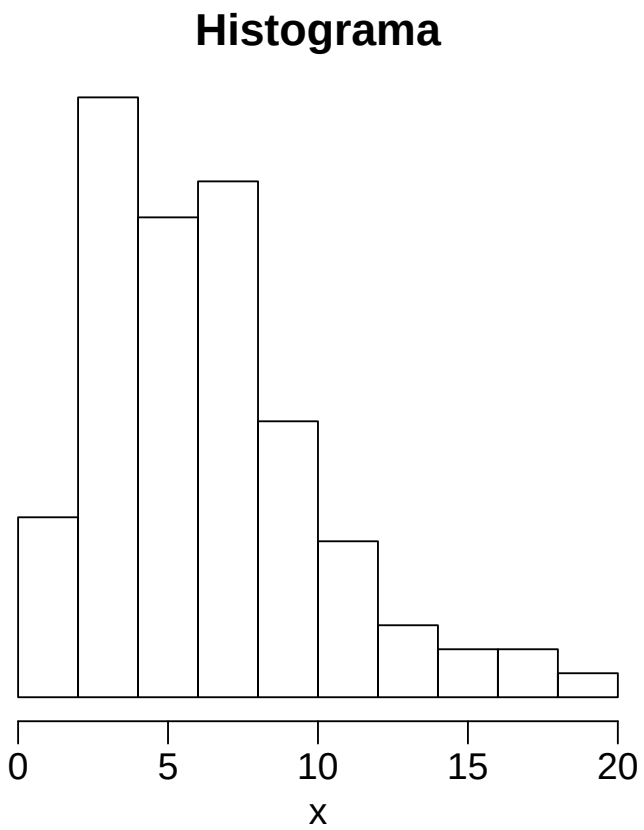


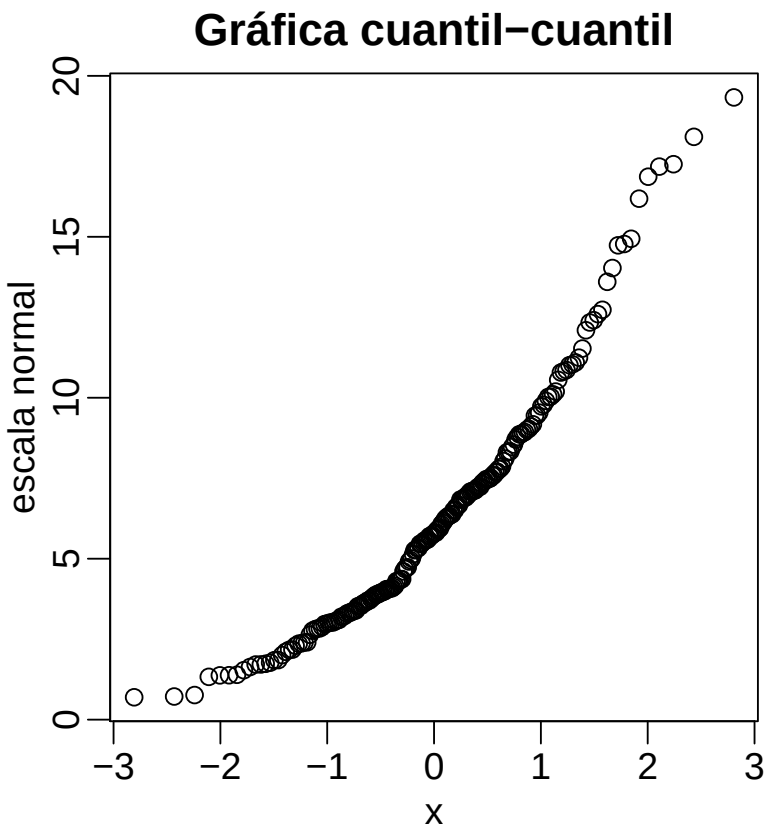


−ebz

Normalidad

Ejemplo simulado: 200 observaciones **no** normales





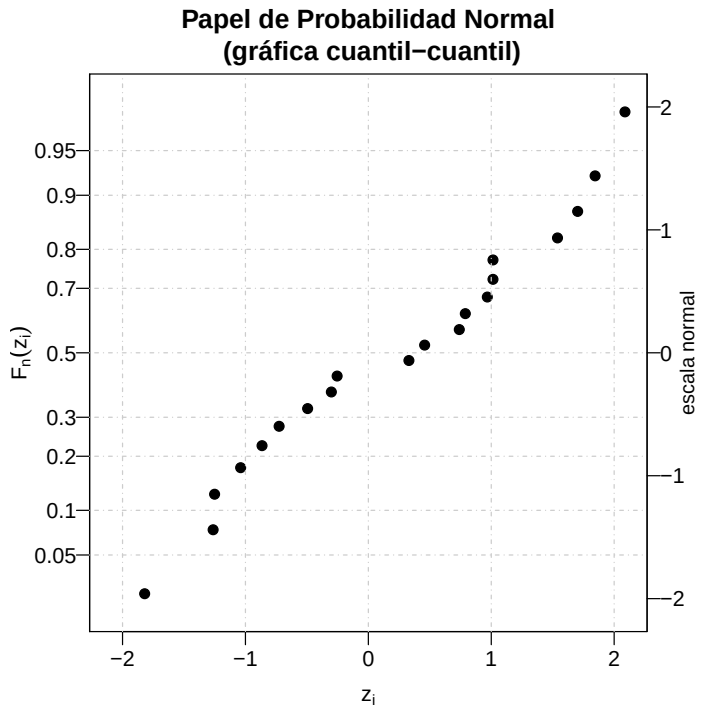
−ebz

Normalidad

Ejemplo

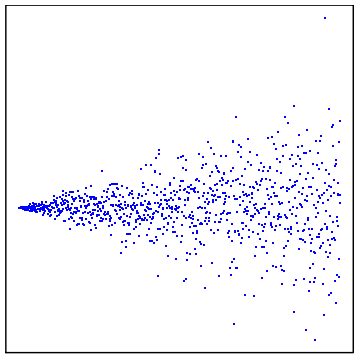
1. Ordene la muestra $\{z_1, \ldots, z_n\}$: $x_1 = z_{(1)}, \ldots, x_n = z_{(n)}$
2. Calcule la *probabilidad empírica acumulada*: $y_i = F_n(x_i) = \frac{i-1/2}{n}$
3. Grafique (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ en *papel de probabilidad normal (cuantil-cuantil)*.

i	z_i	ord.	x_i	$F_n(x_i)$
1	1.703	9	-1.820	0.025
2	-0.865	17	-1.263	0.075
3	-0.301	11	-1.251	0.125
4	1.014	18	-1.039	0.175
5	2.088	2	-0.865	0.225
6	0.740	13	-0.726	0.275
7	-0.254	16	-0.494	0.325
8	0.968	3	-0.301	0.375
9	-1.820	7	-0.254	0.425
10	1.014	14	0.330	0.475
11	-1.251	12	0.458	0.525
12	0.458	6	0.740	0.575
13	-0.726	20	0.789	0.625
14	0.330	8	0.968	0.675
15	1.845	4	1.014	0.725
16	-0.494	10	1.014	0.775
17	-1.263	19	1.539	0.825
18	-1.039	1	1.703	0.875
19	1.539	15	1.845	0.925
20	0.789	5	2.088	0.975

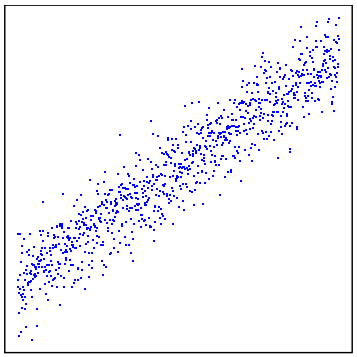


−ebz

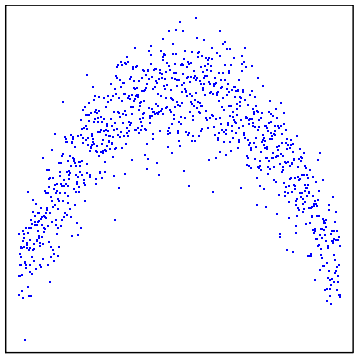
Posibles remedios cuando residuales insatisfactorios [2]



a) embudo



b) creciente



c) curvo

Patrón:	Gráfica de $\hat{e}_i$ versus:		
	Orden temporal	Respuesta ajustada $\hat{y}_i$	Valores x_{ji}
a) Embudo indicando varianza no constante	Uso de Mínimos Cuadrados Ponderados	Uso de Mínimos Cuadrados Ponderados o transformación de la y_i	Uso de Mínimos Cuadrados Ponderados o transformación de la y_i
b) Banda ascendente o descendente	Considere incluir un término lineal en el tiempo	Error en el análisis u omisión de β_0	Error en los cálculos. Efecto de primer orden de X_j no eliminado
c) Banda curva	Considere incluir términos lineal y cuadrático en el tiempo	Considere añadir términos extra al modelo o transformar la respuesta y_i	Considere añadir términos extra al modelo o transformar la respuesta y_i

[2] Draper and Smith (1998), p. 64

Referencias

Box, G. E. P. and G. M. Jenkins (1970).
Time Series Analysis, Forecasting and Control.
Oakland, CA.: Holden-Day.

Draper, N. and H. Smith (1998).
Applied Regression Analysis (3rd ed.).
New York: Wiley.