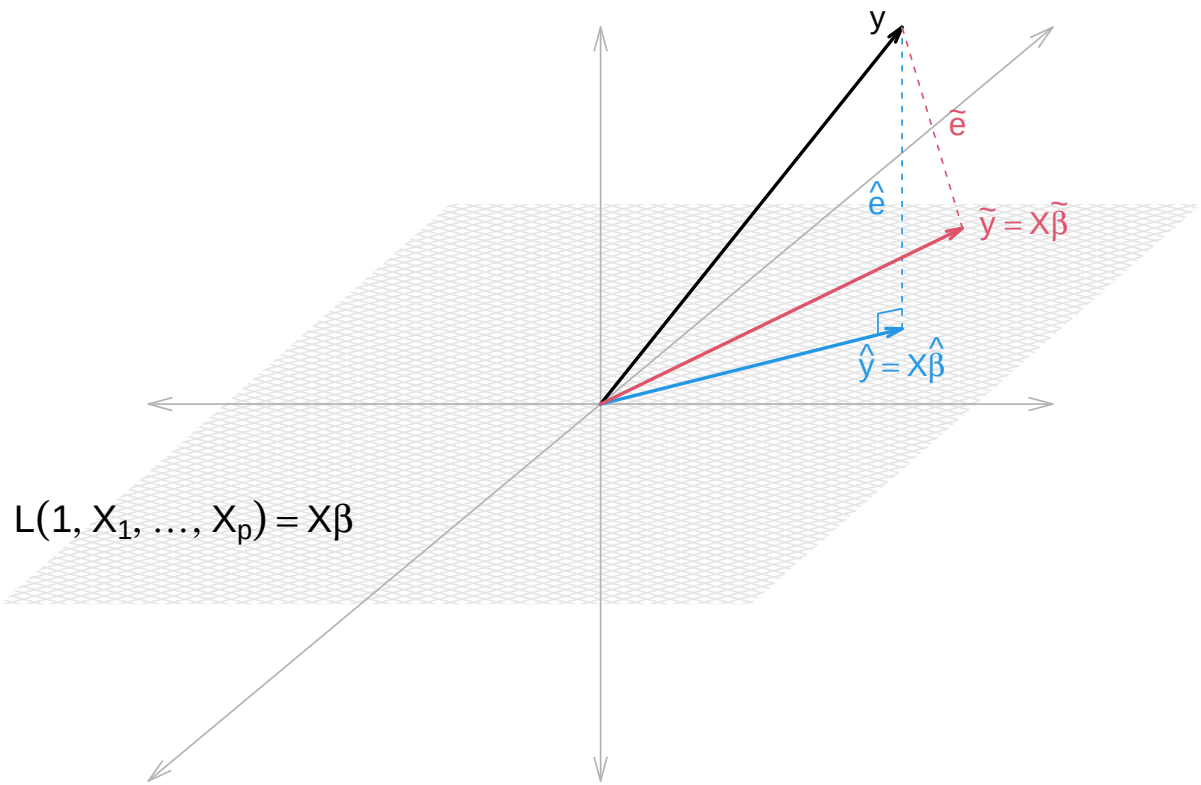
4 - Regresión Lineal Múltiple



Contenido

Modelo de Regresión Lineal Múltiple

Modelo:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \epsilon_i$$

donde,

y_i	:	respuesta al i-ésimo nivel del regresor ($i = 1, \ldots, n$)
x_{ij}	:	j-ésimo regresor a su i-ésimo nivel ($j = 1, 2$)
β_0	:	ordenada al origen
β_j	:	coeficiente (tasa de cambio) del j-ésimo regresor
ϵ_i	:	error aleatorio

O bien, si $x_i = (1, x_{i1}, x_{i2})'$, y $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)'$,

$$y_i = x_i' \beta + \epsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Equivalentemente,

$$y = X\beta + \epsilon$$

Supuestos:

$$\text{rango}(X) = 2 + 1 = 3 = q \ (\leq n)$$

$$\epsilon_i \sim \text{N}(0, \sigma^2) \ \textit{i.i.d.} \quad \text{(Supuesto Esférico)}$$

–ebz

Mínimos Cuadrados

Suma de cuadrados

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i' \beta)^2$$

Criterio de Mínimos Cuadrados:

$$\min_{\beta} S(\beta) \equiv \min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 \equiv \min_{\beta_0, \beta_1, \beta_2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})^2 \right\}$$

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_j} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2\sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})(-1) &= 0 \\ 2\sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})(-x_{i1}) &= 0 \\ 2\sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})(-x_{i2}) &= 0 \end{cases}$$

Mínimos Cuadrados

Ecuaciones Normales

$$\begin{array}{ccccccc} n\beta_0 & + & \beta_1 \sum x_{i1} & + & \beta_2 \sum x_{i2} & = & \sum y_i \\ \beta_0 \sum x_{i1} & + & \beta_1 \sum x_{i1}^2 & + & \beta_2 \sum x_{i1}x_{i2} & = & \sum x_{i1} y_i \\ \beta_0 \sum x_{i2} & + & \beta_1 \sum x_{i1}x_{i2} & + & \beta_2 \sum x_{i2}^2 & = & \sum x_{i2} y_i \end{array}$$

cuya solución $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ son los *estimadores de mínimos cuadrados*.
El correspondiente estimador de la varianza σ^2 está dado por:

$$s^2 = \frac{1}{n-3}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{n-3}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2})^2$$

Ejemplo: Desempeño de Supervisores[1]

La siguiente tabla muestra los resultados de un estudio de sicología industrial del desempeño de supervisores como función de distintas variables características (medidas entre 0 y 1) de los mismos. Las variables consideradas fueron:

variable	descripción
y	desempeño total del supervisor
x_1	manejo de quejas de los empleados
x_2	no permite privilegios especiales
x_3	oportunidad de aprender cosas nuevas
x_4	aumentos basados en desempeño
x_5	*muy crítico* en desempeño pobre
x_6	tasa de avance a mejores trabajos

n	y	x1	x2	x3	x4	x5	x6	n	y	x1	x2	x3	x4	x5	x6
1	0.43	0.51	0.30	0.39	0.61	0.92	0.45	16	0.81	0.90	0.50	0.72	0.60	0.54	0.36
2	0.63	0.64	0.51	0.54	0.63	0.73	0.47	17	0.74	0.85	0.64	0.69	0.79	0.79	0.63
3	0.71	0.70	0.68	0.69	0.76	0.86	0.48	18	0.65	0.60	0.65	0.75	0.55	0.80	0.60
4	0.61	0.63	0.45	0.47	0.54	0.84	0.35	19	0.65	0.70	0.46	0.57	0.75	0.85	0.46
5	0.81	0.78	0.56	0.66	0.71	0.83	0.47	20	0.50	0.58	0.68	0.54	0.64	0.78	0.52
6	0.43	0.55	0.49	0.44	0.54	0.49	0.34	21	0.50	0.40	0.33	0.34	0.43	0.64	0.33
7	0.58	0.67	0.42	0.56	0.66	0.68	0.35	22	0.64	0.61	0.52	0.62	0.66	0.80	0.41
8	0.71	0.75	0.50	0.55	0.70	0.66	0.41	23	0.53	0.66	0.52	0.50	0.63	0.80	0.37
9	0.72	0.82	0.72	0.67	0.71	0.83	0.31	24	0.40	0.37	0.42	0.58	0.50	0.57	0.49
10	0.67	0.61	0.45	0.47	0.62	0.80	0.41	25	0.63	0.54	0.42	0.48	0.66	0.75	0.33
11	0.64	0.53	0.53	0.58	0.58	0.67	0.34	26	0.66	0.77	0.66	0.63	0.88	0.76	0.72
12	0.67	0.60	0.47	0.39	0.59	0.74	0.41	27	0.78	0.75	0.58	0.74	0.80	0.78	0.49
13	0.69	0.62	0.57	0.42	0.55	0.63	0.25	28	0.48	0.57	0.44	0.45	0.51	0.83	0.38
14	0.68	0.83	0.83	0.45	0.59	0.77	0.35	29	0.85	0.85	0.71	0.71	0.77	0.74	0.55
15	0.77	0.77	0.54	0.72	0.79	0.77	0.46	30	0.82	0.82	0.39	0.59	0.64	0.78	0.39

[1] Chatterjee, Hadi, and Price (2000).

−ebz

Ejemplo: Desempeño de Supervisores (cont.)

Considere el modelo

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_3 x_{i3} + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, 30$$

Modelo ajustado: $\hat{y} = 0.099 + 0.644 x_1 + 0.211 x_3$

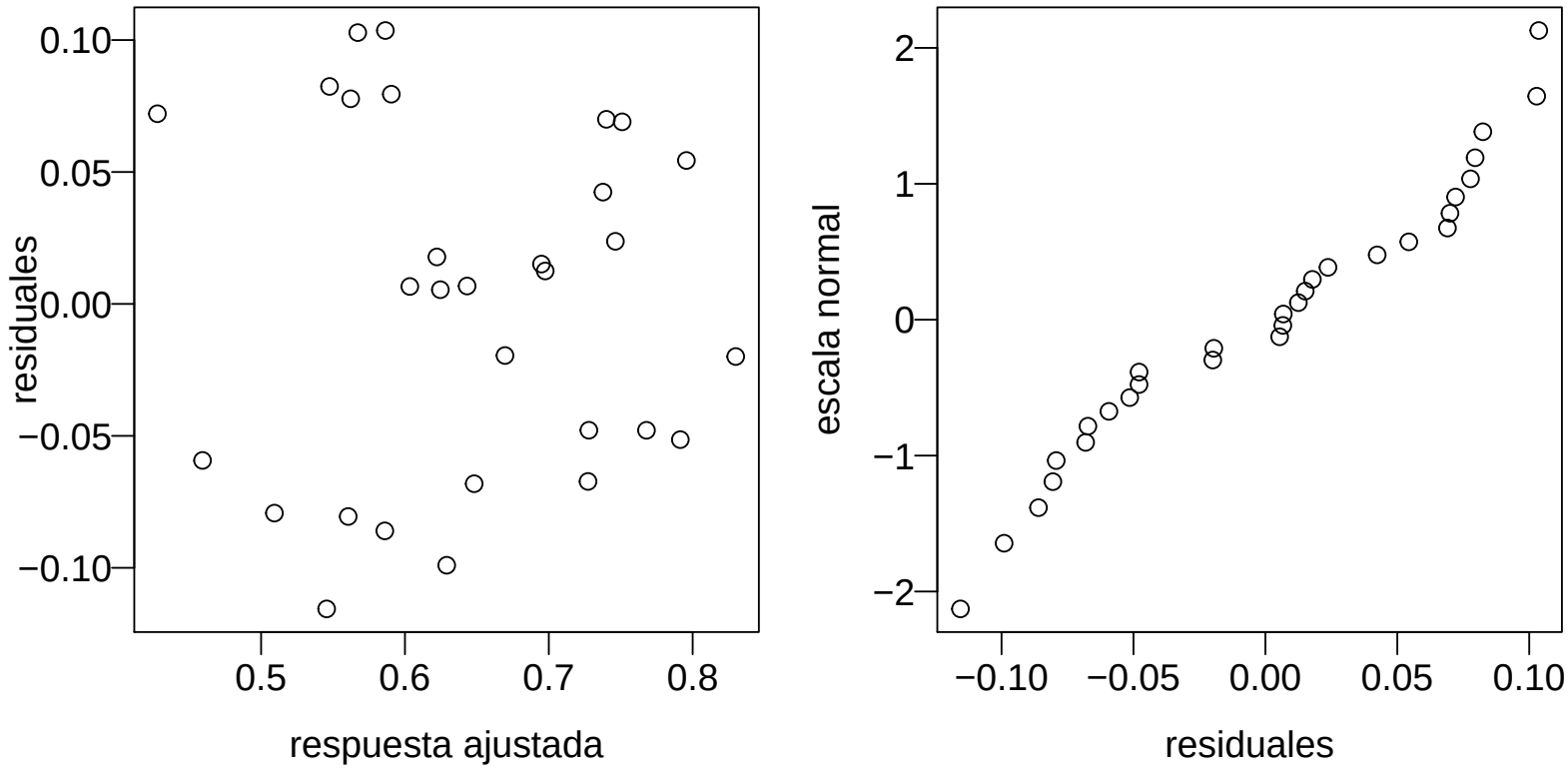
$$s = 0.06817$$

n	y	$\hat{y}$	$\hat{e}$	n	y	$\hat{y}$	$\hat{e}$
1	0.43	0.51	−0.08	16	0.81	0.83	−0.02
2	0.63	0.62	0.01	17	0.74	0.79	−0.05
3	0.71	0.69	0.02	18	0.65	0.64	0.01
4	0.61	0.60	0.01	19	0.65	0.67	−0.02
5	0.81	0.74	0.07	20	0.50	0.59	−0.09
6	0.43	0.55	−0.12	21	0.50	0.43	0.07
7	0.58	0.65	−0.07	22	0.64	0.62	0.02
8	0.71	0.70	0.01	23	0.53	0.63	−0.10
9	0.72	0.77	−0.05	24	0.40	0.46	−0.06
10	0.67	0.59	0.08	25	0.63	0.55	0.08
11	0.64	0.56	0.08	26	0.66	0.73	−0.07
12	0.67	0.57	0.10	27	0.78	0.74	0.04
13	0.69	0.59	0.10	28	0.48	0.56	−0.08
14	0.68	0.73	−0.05	29	0.85	0.80	0.05
15	0.77	0.75	0.02	30	0.82	0.75	0.07

−ebz

Ejemplo: Desempeño de Supervisores (cont.)

Analisis de residuales



−ebz

Modelo de Regresión Lineal Múltiple

Modelo:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

donde,

y_i	:	respuesta al nivel i-ésimo nivel del regresor ($i = 1, \ldots, n$)
x_{ij}	:	j-ésimo regresor a su i-ésimo nivel ($j = 1, \ldots, p$)
β_0	:	ordenada al origen
β_j	:	coeficiente (tasa de cambio) del j-ésimo regresor

O bien, si $x_i = (1, x_{i1}, \ldots, x_{ip})'$ y $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)'$,

$$y_i = x_i' \beta + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$y = X\beta + \epsilon$$

Supuestos

$$\text{rango}(X) = p + 1 = q \ (\leq n)$$

$$\epsilon_i \sim \text{N}(0, \sigma^2) \ \textit{i.i.d.}$$

Se pide que la matriz X sea de rango completo. Esto es, que tenga sus q columnas linealmente independientes.

–ebz

Regresión lineal múltiple

En general, un modelo de *regresión lineal múltiple* es una aproximación a la variable de respuesta y como tal es un *modelo empírico*.
Ejemplos:

$$
\begin{aligned}
y &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon \\
y &= \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \epsilon \\
y &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \epsilon \\
y &= \alpha + \beta P + \gamma T + \delta L + \epsilon \\
y &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_p x_p + \epsilon
\end{aligned}
$$

Matricialmente, si

$$y_{n\times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad \epsilon_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}; \quad \beta_{q\times 1} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}; \quad X_{n\times q} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

entonces el modelo de *regresión lineal múltiple* se puede expresar como

$$y = X\beta + \epsilon$$

con los supuestos:

$$\text{rango}(X) = p + 1 = q \ (\leq n)$$

$$\epsilon \sim \text{N}_n(0, \sigma^2 I_n)$$

Mínimos Cuadrados

$$\begin{aligned} S(\beta) &= \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \cdots - \beta_p x_{ip})^2 = \sum (y_i - x_i'\beta)^2 \\ &= ||y - X\beta||^2 = (y - X\beta)'(y - X\beta) = y'y - 2y'X\beta + \beta' X'X\beta \end{aligned}$$

Problema de Mínimos Cuadrados:

$$\min_{\beta} S(\beta) \equiv \min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 \equiv \min_{\beta_0,\ldots,\beta_p} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \cdots - \beta_p x_{ip})^2 \right\}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2\sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \cdots - \beta_p x_{ip})^1 (-1) &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ 2\sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \cdots - \beta_p c_{ip})^1 (-x_{ip}) &= 0 \end{cases}$$

que da lugar a las *ecuaciones normales* (q ecuaciones y q incógnitas) :

−ebz

Ecuaciones normales

Ecuaciones normales

$$\begin{array}{ccccccccc} n\beta_0 & + & \beta_1 \sum x_{i1} & + & \cdots & + & \beta_p \sum x_{ip} & = & \sum y_i \\ \beta_0 \sum x_{i1} & + & \beta_1 \sum x_{i1}^2 & + & \cdots & + & \beta_p \sum x_{i1} x_{ip} & = & \sum x_{i1} y_i \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_0 \sum x_{ip} & + & \beta_1 \sum x_{i1} x_{ip} & + & \cdots & + & \beta_p \sum x_{ip}^2 & = & \sum x_{ip} y_i \end{array}$$

cuya solución $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_p$ son los *estimadores de mínimos cuadrados (EMC)*.

Mínimos cuadrados y ecuaciones normales

Matricialmente el problema es

$$\min_{\beta} S(\beta) \equiv \min_{\beta} \{y'y - 2y'X\beta + \beta'X'X\beta\}$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial \beta} = -2X'y + 2X'X\beta \Longrightarrow X'X\beta = X'y$$

Ecuaciones normales

$$X'X\beta = X'y$$

Esto es,

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{i1} & \cdots & \sum x_{ip} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \cdots & \sum x_{i1}x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_{ip} & \sum x_{i1}x_{ip} & \cdots & \sum x_{ip}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{i1}y_i \\ \vdots \\ \sum x_{ip}y_i \end{bmatrix}$$

Puesto que rango$(X) = q$, se tiene que rango$(X'X) = q$ y por lo tanto $X'X$ es invertible. Entonces,

Estimadores de mínimos cuadrados (EMC)

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

–ebz

El valor de la respuesta y_u ajustado al nivel $x_u = (1, x_{u1}, \ldots, x_{up})'$ del vector de regresores está dado por:

$$\hat{y}_u = x_u'\hat{\beta} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{u1} + \cdots + \hat{\beta}_p x_{up}$$

El vector de la respuesta ajustada $\hat{y}$ es

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1'\hat{\beta} \\ \vdots \\ x_n'\hat{\beta} \end{bmatrix} = X\hat{\beta} = X(X'X)^{-1}X'y$$

$$\hat{y} = [X(X'X)^{-1}X']y = Hy$$

donde $H = X(X'X)^{-1}X'$ es la *matriz gorro* o *matriz sombrero* (*"hat matrix"*). Nuevamente, los *residuales* $\hat{e}$ están dados por

$$\begin{aligned} \hat{e} &= y - \hat{y} = y - X\hat{\beta} \\ &= y - Hy = (I - H)y \\ &= My \end{aligned}$$

con $M = (I - H) = (I - X(X'X)^{-1}X')$.

–ebz

Ejemplo: Desempeño de Supervisores (cont.)

Considere el modelo

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_3 x_{i3} + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, 30$$

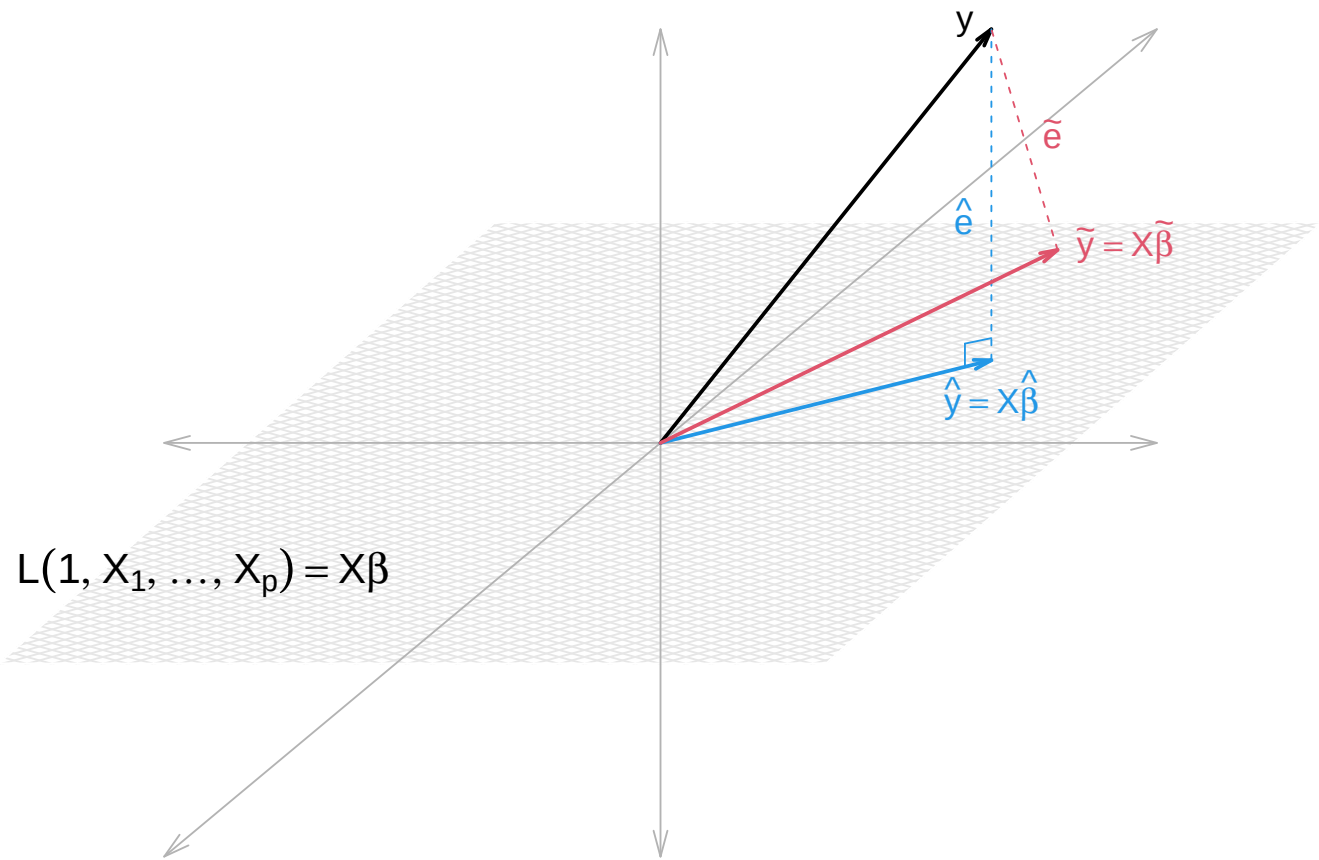
$$X'X = \begin{bmatrix} 30.00 & 19.98 & 16.91 \\ 19.98 & 13.82 & 11.53 \\ 16.91 & 11.53 & 9.93 \end{bmatrix}; \; X'y = \begin{bmatrix} 19.39 \\ 13.30 \\ 11.19 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30.00 & 19.98 & 16.91 \\ 19.98 & 13.82 & 11.53 \\ 16.91 & 11.53 & 9.93 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 19.39 \\ 13.30 \\ 11.19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.099 \\ 0.644 \\ 0.211 \end{bmatrix} = \hat{\beta}$$

Modelo ajustado:

$$\hat{y} = 0.099 + 0.644 x_1 + 0.211 x_3$$

Representación Geométrica de Mínimos Cuadrados



Interpretación geométrica: $\hat{y}$ es la proyección ortogonal sobre el plano generado por los regresores.

Ejemplo: Servicio de televisión por cable [2]

	Variable	Descripción
1	Colonia	Colonia a la que pertenece el hogar de la zona residencial
2	Manzana	Número de manzana a la que pertenece el hogar
3	Adultos	Número de adultos por hogar
4	Niños	Número de niños menores de 12 años por hogar
5	Teles	Número de televisores por hogar
6	Tipo	Tipo de televisor que posee: blanco y negro (B), color (C), ambos (A)
7	TVtot	Suma del número de horas frente al televisor en la semana de todos los miembros de la familia
8	Renta	Cantidad máxima de renta que el jefe del hogar estaría dispuesto a pagar al mes por servicio de TV por cable
9	Valor	Valor catastral del hogar (m$). La respuesta se usa para dar idea aproximada del ingreso familiar

obs.	colonia	manzana	adultos	niños	teles	renta	tvtot	tipo	valor
1	2	20	3	2	2	50	68	B	79928
2	2	25	3	3	1	65	82	B	94415
3	2	20	1	2	1	45	40	A	120896
4	2	8	2	2	2	35	56	A	132867
5	2	25	1	2	0	0	0	N	141901
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
36	1	2	2	0	2	60	20	A	332699
37	1	2	3	0	3	70	28	C	336290
38	1	9	3	0	5	85	28	C	355641
39	1	9	2	0	3	70	20	C	357972
40	1	4	3	0	4	80	28	C	370325

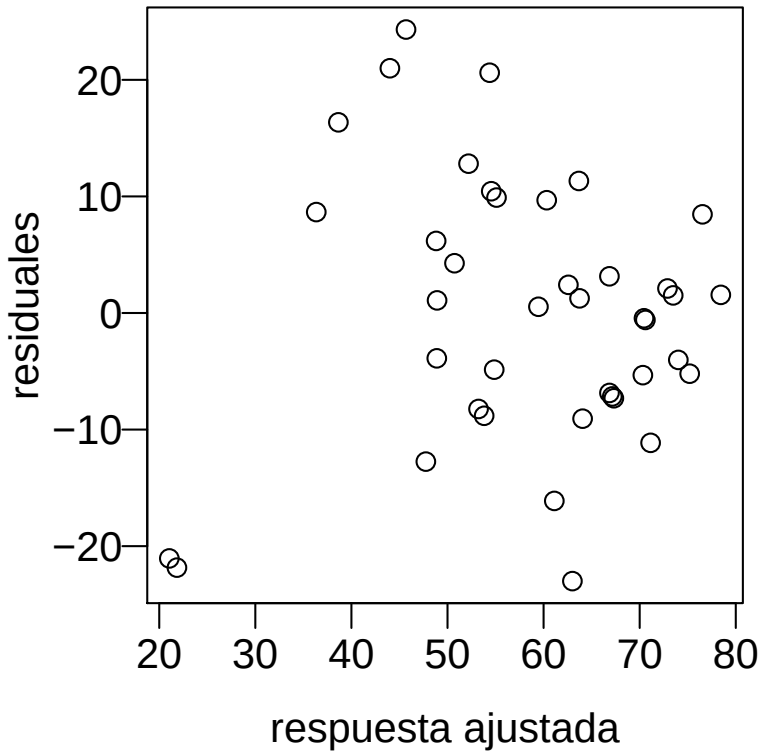
[2] Aguirre et al. (2006).

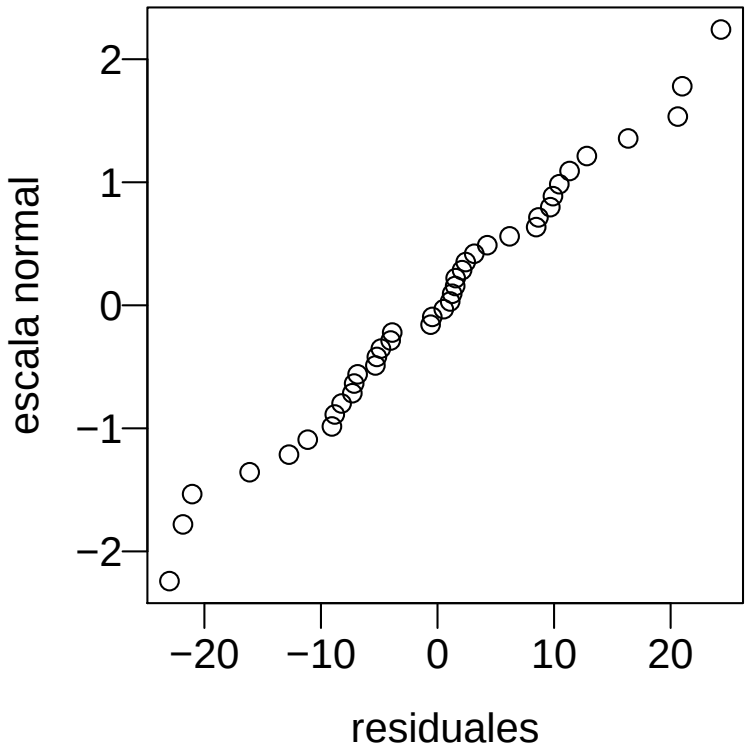
Ejemplo: Servicio de televisión por cable (cont.)

```
Response: renta
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    9.80566   10.32633   0.950 0.348838
ninos         -4.91432    2.73477  -1.797 0.080973
adultos        2.64006    2.44211   1.081 0.287065
tvtot          0.45053    0.11445   3.936 0.000375
I(valor/1000)  0.12989    0.03141   4.135 0.000211

Residual standard error: 11.99 on 35 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5916,     Adjusted R-squared: 0.545
F-statistic: 12.68 on 4 and 35 DF,  p-value: 1.772e-06


Analysis of Variance Table

              Df   Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
SCReg          4   7293.4  1823.4 12.6788 1.768e-06
SCRes         35   5034.2   143.8
SCTot         39  12327.6   316.1
```

Ejemplo: Servicio de televisión por cable (cont.)

Analisis de residuales





¿Tendencia? ¿Datos atípicos?

−ebz

Propiedades de los EMC

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\beta}] &= \mathbb{E}[(X'X)^{-1}X'y] = \mathbb{E}[(X'X)^{-1}X'(X\beta+\epsilon)] \\
&= (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\mathbb{E}[\epsilon] \\
&= \beta \\
\text{cov}(\hat{\beta}) &= \text{cov}((X'X)^{-1}X'y) \\
&= (X'X)^{-1}X'\text{cov}(y)X(X'X)^{-1} \\
&= (X'X)^{-1}X'\sigma^2 I_n X(X'X)^{-1} \\
&= \sigma^2(X'X)^{-1} \\
&= \sigma^2 C
\end{aligned}
$$

con $C = (X'X)^{-1}$. Así,

$$
\begin{aligned}
\text{var}(\hat{\beta}_j) &= \sigma^2 C_{jj} \\
\text{cov}(\hat{\beta}_j, \hat{\beta}_k) &= \sigma^2 C_{jk}
\end{aligned}
$$

Propiedades de los EMC

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\sum \hat{e}_i^2 &= ||\hat{e}||^2 = \hat{e}'\hat{e} \\ &= (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) \\ &= y'y - 2y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \\ &= y'y - y'X\hat{\beta}\end{aligned}$$

pues por las ecuaciones normales $X'X\beta = X'y$. Entonces,

$$S(\hat{\beta}) = ||\hat{e}||^2 = y'y - \hat{\beta}'X'y = (y - X\hat{\beta})'y$$

Se puede mostrar que

$$s^2 = \frac{\text{SC}_{\text{Res}}}{n - q} = \text{CM}_{\text{Res}}$$

es un estimador insesgado de σ^2, aunque dependiente del modelo.

Intervalos de Confianza para los coeficientes β_j

El hecho que $y = X\beta + \epsilon$, con $\epsilon \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 I)$ implica que $y \sim \mathrm{N}_n(X\beta, \sigma^2 I)$, y siendo $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$, $\hat{\beta}$ es una transformación lineal de un vector normal multivariado. Entonces,

$$\hat{\beta} \sim \mathrm{N}_q\left(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1}\right)$$

y en particular, $\mathrm{var}(\hat{\beta}_j) = \sigma^2 C_{jj}$, y $\mathrm{ee}(\hat{\beta}_j) = \sigma\sqrt{C_{jj}}$, donde $C_{jj} = (X'X)^{-1}_{jj}$.

Ahora bien, sean $q = p + 1$ y $\nu = n - q$ los grados de libertad de los residuales. Se sigue entonces que $\frac{\nu s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_\nu$, independientemente de $\hat{\beta}$ y se tiene que

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s\sqrt{C_{jj}}} \sim t_\nu$$

Por lo tanto, un intervalo del $100(1-\alpha)\,\%$ de confianza para β_j estaría dado por

$$\hat{\beta}_j \pm t_{(1-\alpha/2,\nu)} s\sqrt{C_{jj}}$$

Una región de *confianza conjunta* del $100(1-\alpha)\,\%$ para el vector de parámetros $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_p)'$, de acuerdo a Bonferroni, estaría dada por el producto de los intervalos del $100(1-\alpha/q)\,\%$ de confianza marginales. Esto es,

$$\hat{\beta}_j \pm t_{(1-\alpha/2q,\nu)} s\sqrt{C_{jj}}, \quad j = 0, \ldots, p;\ (q = p+1)$$

–ebz

Intervalos de confianza y de predicción para la respuesta $\hat{y}(x)$

Considere el regresor al nivel $x_0 = (1, x_{10}, \ldots, x_{p0})'$. La respuesta media ajustada correspondiente es $\hat{y}_0 = \hat{y}(x_0) = x_0'\hat{\beta}$, con

$$\text{var}(\hat{y}_0) = \text{var}(x_0'\hat{\beta}) = x_0'\text{var}(\hat{\beta})x_0 = \sigma^2 x_0'(X'X)^{-1}x_0$$

Por lo tanto, un intervalo del $100(1-\alpha)\,\%$ de confianza para la respuesta media $\hat{y}$ al nivel x_0 esta dado por

$$\hat{y}(x_0) \pm t_{(1-\alpha/2,\nu)} s\sqrt{x_0'(X'X)^{-1}x_0}$$

Similarmente, para el mismo nivel x_0, el correspondiente intervalo de *predicción* para una respuesta nueva $\hat{y}_0 + \epsilon$ es

$$\hat{y}(x_0) \pm t_{(1-\alpha/2,\nu)} s\sqrt{1 + x_0'(X'X)^{-1}x_0}$$

puesto que

$$\text{var}(\hat{y}(x_0) + \epsilon) = \text{var}(x_0'\hat{\beta} + \epsilon) = \sigma^2 x_0'(X'X)^{-1}x_0 + \sigma^2 = \sigma^2\left(x_0'(X'X)^{-1}x_0 + 1\right)$$

por independencia de la nueva observación.

Prueba de Hipótesis

Considere el modelo de regresión, llamado *modelo completo*

$$y = XB + \epsilon = X_1 B_1 + X_2 B_2 + \epsilon \qquad \text{(MC)}$$

donde

$$B_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix}_{q_1 \times 1} ; \; B_2 = \begin{bmatrix} \beta_{r+1} \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}_{q_2 \times 1} ; \; B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}_{q \times 1}$$

con $q = q_1 + q_2$. Suponga que se desea contrastar las hipótesis

$$\mathrm{H}_0 : B_2 = 0 \; \textit{vs.} \; \mathrm{H}_1 : B_2 \neq 0$$

Entonces para el modelo completo (MC) se tiene

$$\begin{aligned} \hat{B} &= (X'X)^{-1} X'y \\ \mathrm{SC}_{\mathrm{Reg}}(X_1, X_2) &= \hat{B}' X'y - n\bar{y}^2 \\ \mathrm{CM}_{\mathrm{Res}}(X_1, X_2) &= \left(y'y - \hat{B}' X'y\right) / (n - q) \end{aligned}$$

Por otro lado, considere el *modelo reducido* (MR)

$$y = X_1 B_1 + \epsilon \qquad \text{(MR)}$$

luego

$$\begin{aligned} \hat{B}_1 &= (X_1'X_1)^{-1} X_1'y \\ \mathrm{SC}_{\mathrm{Reg}}(X_1) &= \hat{B}_1' X_1'y - n\bar{y}^2 \\ \mathrm{CM}_{\mathrm{Res}}(X_1) &= \left(y'y - \hat{B}_1' X_1'y\right) / (n - q_1) \end{aligned}$$

Entonces, la *suma de cuadrados extra* (SC_{Extra}) debida a los regresores X_2 dado que los regresores X_1 están en el modelo sería

$$\begin{aligned}
\text{SC}_{\text{Extra}}(X_2|X_1) &= \text{SC}_{\text{Reg}}(X_1, X_2) - \text{SC}_{\text{Reg}}(X_1) \\
&= [\text{SC}_{\text{Tot}} - \text{SC}_{\text{Res}}(X_1, X_2)] - [\text{SC}_{\text{Tot}} - \text{SC}_{\text{Res}}(X_1)] \\
&= \text{SC}_{\text{Res}}(X_1) - \text{SC}_{\text{Res}}(X_1, X_2) \\
&= \text{SC}_{\text{Res}}(\text{MR}) - \text{SC}_{\text{Res}}(\text{MC})
\end{aligned}$$

Grados de libertad de los cuadrados extra:

$$q_2 = (n - q_1) - (n - q) = q - q_1$$

Entonces, para contrastar $\text{H}_0 : B_2 = 0$ *vs.* $\text{H}_1 : B_2 \neq 0$, se utiliza el estadístico

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\left[\left(y'y - \hat{B}'X'y\right) - \left(y'y - \hat{B}_1'X_1'y\right)\right]/(q - q_1)}{\text{SC}_{\text{Res}}(X_1, X_2)/(n - q)} \\
&= \frac{[\text{SC}_{\text{Res}}(X_1) - \text{SC}_{\text{Res}}(X_1, X_2)]/(q - q_1)}{\text{SC}_{\text{Res}}(X_1, X_2)/(n - q)} \\
&= \frac{\text{SC}_{\text{Extra}}(X_2|X_1)/q_2}{\text{SC}_{\text{Res}}(X_1, X_2)/(n - q)} \\
&= \frac{\text{CM}_{\text{Extra}}}{\text{CM}_{\text{Res}}(MC)} \sim F_{q_2, n-q}
\end{aligned}$$

–ebz

Ejemplo: Servicio de televisión por cable (cont.)

Modelo original completo:

Regresión y análisis de varianza

```
Response: renta
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    9.80566   10.32633   0.950 0.348838
ninos         -4.91432    2.73477  -1.797 0.080973
adultos        2.64006    2.44211   1.081 0.287065
tvtot          0.45053    0.11445   3.936 0.000375
I(valor/1000)  0.12989    0.03141   4.135 0.000211

Residual standard error: 11.99 on 35 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5916,     Adjusted R-squared: 0.545
F-statistic: 12.68 on 4 and 35 DF,  p-value: 1.772e-06


Analysis of Variance Table
              Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
ninos          1  793.1   793.1  5.5138 0.0246456
adultos        1 2198.8  2198.8 15.2873 0.0004048
tvtot          1 1841.7  1841.7 12.8041 0.0010366
I(valor/1000)  1 2459.8  2459.8 17.1014 0.0002106
Residuals     35 5034.2   143.8
```

Ejemplo: Servicio de televisión por cable (cont.)

Modelo original completo:

Análisis de varianza secuencial y suma extra de cuadrados

```
Response: renta

           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
ninos       1    793  793.08  5.5138 0.0246456
adultos     1   2199 2198.82 15.2873 0.0004048
tvtot       1   1842 1841.66 12.8041 0.0010366
vc          1   2460 2459.76 17.1014 0.0002106
Residuals  35   5034  143.83
TotCorr    39  12328
Correction  1 135722
Total      40 148050
```

```
Suma de Cuadrados secuencial (Tipo I)

Model 0: renta ~ 1
Model 1: renta ~ ninos
Model 2: renta ~ ninos + adultos
Model 3: renta ~ ninos + adultos + tvtot
Model 4: renta ~ ninos + adultos + tvtot + vc

  Res.Df     RSS Df Sum of Sq       F    Pr(>F)
0     39 12327.5
1     38 11534.4  1    793.08  5.5138 0.0246456
2     37  9335.6  1   2198.82 15.2873 0.0004048
3     36  7493.9  1   1841.66 12.8041 0.0010366
4     35  5034.2  1   2459.76 17.1014 0.0002106
```

–ebz

Ejemplo: Servicio de televisión por cable (cont.)

Modelo original completo:
Regresión y análisis de varianza secuencial

```
Response: renta

>>> Modelo A:

lm(formula = renta ~ ninos + adultos +
                tvtot + I(valor/1000), data = dat)

               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)       9.806    10.3263    0.95 0.348838
ninos            -4.914     2.7348   -1.80 0.080973
adultos           2.640     2.4421    1.08 0.287065
tvtot             0.451     0.1144    3.94 0.000375
I(valor/1000)     0.130     0.0314    4.14 0.000211


Analysis of Variance Table

               Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
ninos           1    793     793    5.51 0.02465
adultos         1   2199    2199   15.29 0.00040
tvtot           1   1842    1842   12.80 0.00104
I(valor/1000)   1   2460    2460   17.10 0.00021
Residuals      35   5034     144
```

```
Response: renta

>>> Modelo B:

lm(formula = renta ~ tvtot + I(valor/1000) +
                adultos + ninos, data = dat)

               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)       9.806    10.3263    0.95 0.348838
tvtot             0.451     0.1144    3.94 0.000375
I(valor/1000)     0.130     0.0314    4.14 0.000211
adultos           2.640     2.4421    1.08 0.287065
ninos            -4.914     2.7348   -1.80 0.080973

Analysis of Variance Table

               Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
tvtot           1  826.7   826.7  5.7477   0.02198
I(valor/1000)   1 5672.6  5672.6 39.4386 3.308e-07
adultos         1  329.5   329.5  2.2911   0.13910
ninos           1  464.5   464.5  3.2291   0.08097
Residuals      35 5034.2   143.8
```

–ebz

Igualdad de parámetros

Suponga que se tiene el siguiente *modelo completo*

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \epsilon \qquad \text{(MC)}$$

y se desea probar la siguiente *hipótesis compuesta*

$$\mathrm{H}_0 : \beta_1 = \beta_2 \text{ y } \beta_3 = \beta_4 \quad \textit{vs.} \quad \mathrm{H}_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \text{ o } \beta_3 \neq \beta_4$$

Entonces bajo H_0, el modelo se puede reexpresar como el siguiente *modelo reducido*

$$y = \beta_0 + \beta_1(x_1 + x_2) + \beta_3(x_3 + x_4) + \epsilon \qquad \text{(MR)}$$

y se contrasta H_0 con el estadístico de prueba

$$F = \frac{\left[\mathrm{SC}_{\mathrm{Res}}(\mathrm{MR}) - \mathrm{SC}_{\mathrm{Res}}(\mathrm{MC})\right]/(5-3)}{\mathrm{SC}_{\mathrm{Res}}(\mathrm{MC})/(n-5)} \sim F_{2,n-5}$$

Si $F > F_{1-\alpha}$, se rechaza H_0 con una significancia α y se ha de trabajar con el modelo completo MC.

Ejemplo: Servicio de televisión por cable (cont.)

Suponga que se tiene el siguiente *modelo completo*

$$y = \beta_0 + \beta_1 ninos + \beta_2 adultos + \beta_3 tvtot + \beta_4 vc + \epsilon \qquad \text{(MC)}$$

y se desea probar la siguiente hipótesis: *H_0: Las personas no influyen en la respuesta*.

$$H_0 : (\beta_1, \beta_2) = 0 \quad vs. \quad H_1 : (\beta_1, \beta_2) \neq 0$$

Bajo H_0, el modelo se puede representar con el *modelo reducido*

$$y = \beta_0 + \beta_3 tvtot + \beta_4 vc + \epsilon \qquad \text{(MR)}$$

```
MR <- lm(renta ~ tvtot + vc, data=dat)
summary(MR)
anova(MR)

Response: renta
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    2.66709    8.89914   0.300    0.766
tvtot          0.39197    0.08977   4.366 9.79e-05
vc             0.16821    0.02803   6.001 6.26e-07

Residual standard error: 12.55 on 37 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5272,Adjusted R-squared:  0.5017
F-statistic: 20.63 on 2 and 37 DF,  p-value: 9.576e-07

Analysis of Variance Table
  Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
tvtot          1  826.7   826.7  5.2483   0.02776
vc             1 5672.6  5672.6 36.0124 6.259e-07
Residuals     37 5828.2   157.5
```

```
MC <- lm(renta ~ ninos + adultos + tvtot + vc, data=dat)
anova(MC)

Analysis of Variance Table
Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
ninos          1  793.1   793.1  5.5138 0.0246456
adultos        1 2198.8  2198.8 15.2873 0.0004048
tvtot          1 1841.7  1841.7 12.8041 0.0010366
vc             1 2459.8  2459.8 17.1014 0.0002106
Residuals     35 5034.2   143.8

anova(MR, MC)

Model 1: renta ~ tvtot + vc
Model 2: renta ~ ninos + adultos + tvtot + vc
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F  Pr(>F)
1     37 5828.2
2     35 5034.2  2       794 2.7601 0.07708
```

–ebz

Ejemplo: Producción de un reactor [3]

Se han realizado una serie de ensayos para investigar la influencia de algunos factores *físicos* y *químicos* en la producción de cierto reactor. Las variables consideradas se muestran a continuación:

	variable	tipo
y	producción	respuesta
x_1	voltaje (volts)	físico
x_2	tiempo (min)	físico
x_3	agitación (rpm)	químico
x_4	relación entre reactivos (%)	químico

n	x1	x2	x3	x4	y	n	x1	x2	x3	x4	y
1	150	75	260	0.35	70	9	150	75	260	0.65	60
2	250	75	260	0.35	60	10	250	75	260	0.65	49
3	150	105	260	0.35	89	11	150	105	260	0.65	88
4	250	105	260	0.35	81	12	250	105	260	0.65	82
5	150	75	340	0.35	69	13	150	75	340	0.65	60
6	250	75	340	0.35	62	14	250	75	340	0.65	52
7	150	105	340	0.35	88	15	150	105	340	0.65	86
8	250	105	340	0.35	81	16	250	105	340	0.65	79

[3] Box, Hunter, and Hunter (1978).

Ejemplo: Producción de un reactor (cont.)

Modelo Completo:

Incluye variables *físicas* y *químicas*

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
x1	1	256.00	256.00	28.231	<2e-16
x2	1	2304.00	2304.00	254.075	<2e-16
x3	1	0.25	0.25	0.028	0.871
x4	1	121.00	121.00	13.343	0.004
Resid	11	99.75	9.07		

Modelo Reducido:

Incluye solamente variables *físicas*

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
x1	1	256	256	15.059	0.002
x2	1	2304	2304	135.529	<2e-16
Resid	13	221	17		

Suma extra de cuadrados:

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{\left[\mathrm{SC}_{\mathrm{Res}}(\mathrm{MR}) - \mathrm{SC}_{\mathrm{Res}}(\mathrm{MC})\right]/(5-3)}{\mathrm{SC}_{\mathrm{Res}}(\mathrm{MC})/(n-5)} \\
&= \frac{[221.00 - 99.75]/(5-3)}{99.75/(16-5)} = \frac{121.25/2}{99.75/11} \\
&= 6.685 \ (p = 0.013)
\end{aligned}
$$

```
Model 1: y ~ x1 + x2
Model 2: y ~ x1 + x2 + x3 + x4

  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F  Pr(>F)
1     13 221.00
2     11  99.75  2    121.25 6.6855 0.01259
```

Conclusión: Los datos muestran ($p = 0.013$) que las variables *químicas* también son importantes en la explicación del producción del reactor.

–ebz

Condiciones y Teorema Gauss-Markov

Propiedades deseables de los estimadores se pueden mostrar a partir de *Condiciones de Gauss–Markov*:

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathbb{E}[\epsilon_i] & = & 0 \\ \text{var}(\epsilon_i) & = & \sigma^2 \\ \text{cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) & = & 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{E}[\epsilon] & = & 0 \\ \text{cov}(\epsilon) & = & \sigma^2 I_n \end{array}$$

En muchas de las aplicaciones de la regresión lineal múltiple, estamos interesados en estimaciones de funciones lineales de β. E. g., $\ell'\beta$, o bien, $L\beta$, donde ℓ y L son vector y matriz respectivamente. Por ejemplo,

$$\hat{y}_i = x_i'\hat{\beta}, \quad \hat{y} = X\hat{\beta}, \quad \text{o incluso} \quad \hat{\beta} = I\hat{\beta}$$

Teorema Gauss-Markov

Considere el modelo $y = X\beta + \epsilon$ y sea $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$. Bajo las condiciones de Gauss-Markov, el estimador de mínimos cuadrados, $\ell'\hat{\beta}$, de la función estimable $\ell'\beta$, tiene varianza mínima entre todos los estimadores lineales insesgados de $\ell'\beta$. $\ell'\hat{\beta}$ es BLUE, *"best linear unbiased estimator"*.

Esto es,

$$\text{var}(\ell'\hat{\beta}) \leq \text{var}(d'y), \quad \forall \ d'y \ \ni \ \mathbb{E}[d'y] = \ell'\beta$$

para todo estimador lineal $d'y$ que sea estimador insesgado de $\ell'\beta$.

–ebz

Referencias

Aguirre, V., A. Alegría, B. Artaloitia, B. Balmaseda, J. J. Fernández, V. Guerrero, R. Hernández, A. Islas, V. Lourdes, L. E. Nieto, G. Nuñez, R. Perera, and E. Sainz (2006).
Fundamentos de Probabilidad y Estadística (Segunda ed.).
México: Jit Press.

Box, G. E. P., W. G. Hunter, and J. S. Hunter (1978).
Statistics for Experimenters.
New York: Wiley.

Chatterjee, S., A. S. Hadi, and B. Price (2000).
Regression Analysis by Example (3 ed.).
New York: Wiley.